Google

This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

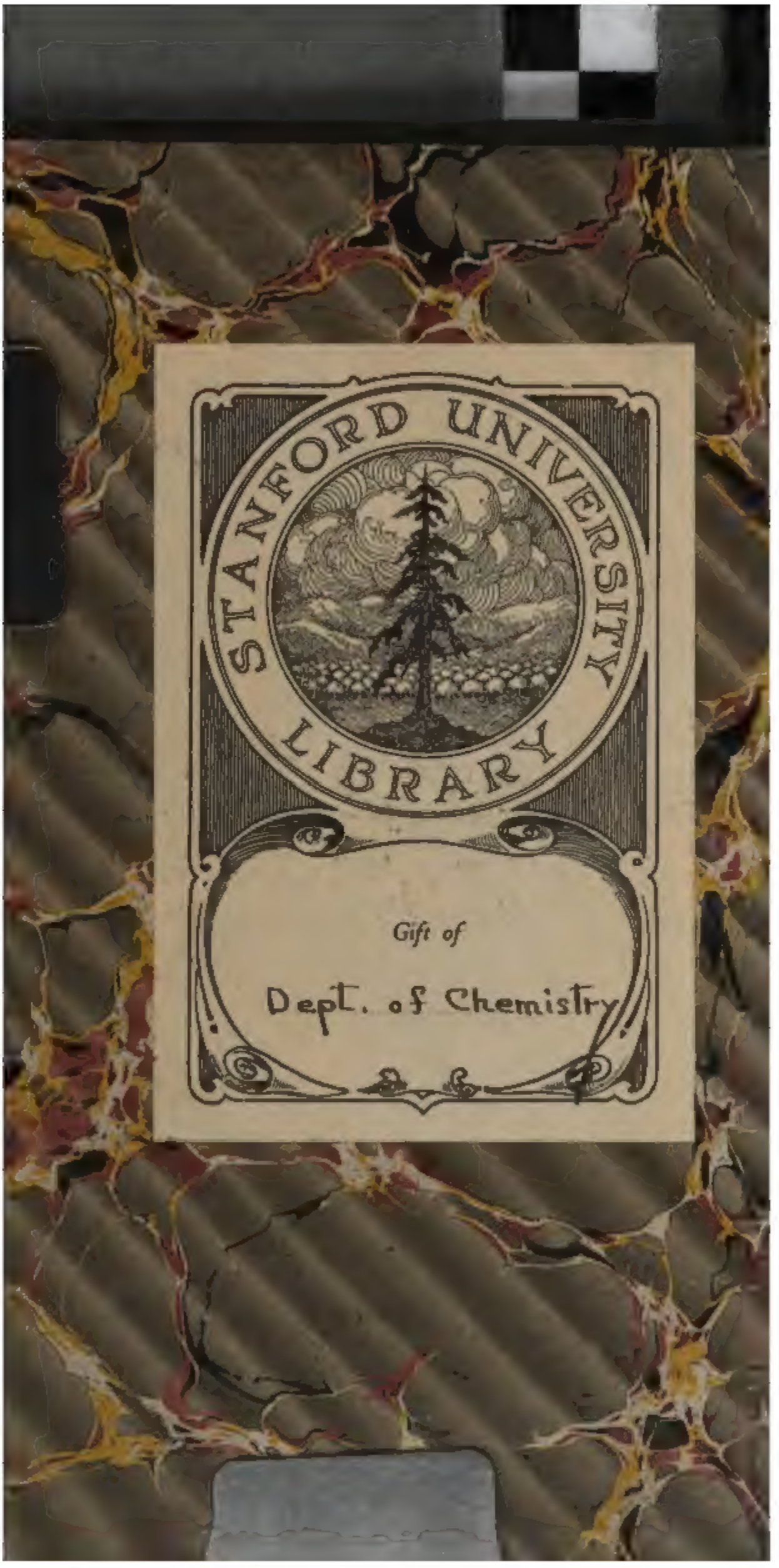
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

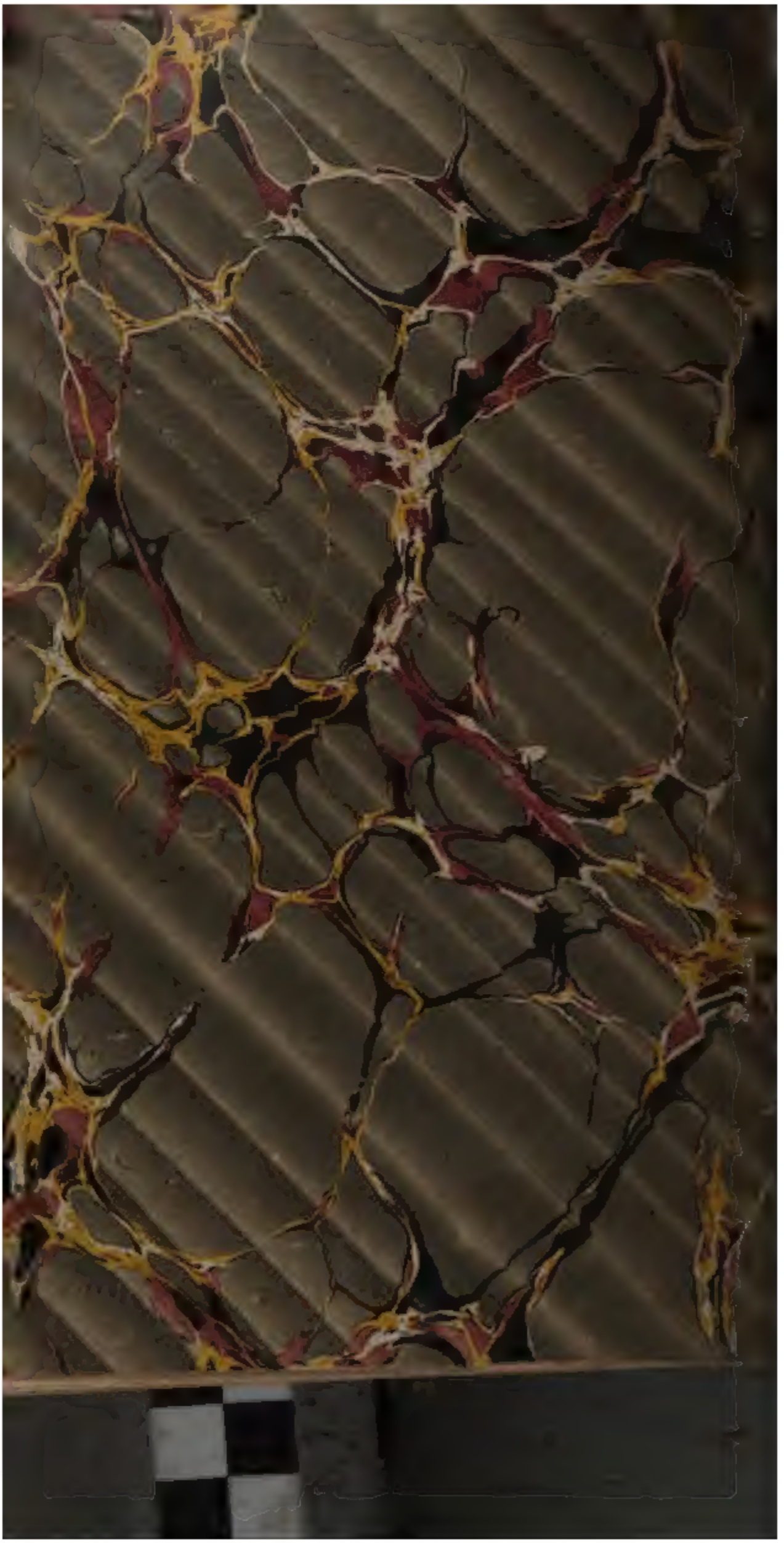
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse http://books.google.com

548 .H359 C.1
Trait e de cristallogr
Stanford University Libraries
3 6105 046 511 114


STANFORD UNIVERSITY
LIBRARY
Gift of
Dept. of Chemistry



548
H368
V.1

TRAITÉ

DE

CRISTALLOGRAPHIE.

Ouvrages de M. HAÜY qui se trouvent chez les mêmes Libraires.

Traité élémentaire de Physique, 2 vol. in-8., avec 19 planches,	15 fr. » c.
Tableau comparatif des résultats de la Cristallographie, 1 vol. in-8°,	5 50
Traité des Caractères physiques des Pierres précieuses, 1 vol. in-8°, 1817, fig.,	6

Sous presse par souscription.

Traité de Minéralogie, deuxième édition, entièrement refaite sur un plan nouveau, 4 vol. in-8° et Atlas d'environ cent dix planches.

DE L'IMPRIMERIE DE HUZARD-COURCIER,
RUE DU JARDINET-SAINT-ANDRÉ-DES-ARCS, N° 12.

TRAITÉ

DE

CRISTALLOGRAPHIE,

SUIVI

D'UNE APPLICATION DES PRINCIPES DE CETTE SCIENCE A LA DÉTERMINATION DES ESPÈCES MINÉRALES,

ET

D'une nouvelle Méthode pour mettre les formes cristallines en projection;

PAR M. L'ABBÉ HAÜY,

Chanoine honoraire de l'Église métropolitaine de Paris, Membre de la Légion-d'Honneur, Chevalier de l'Ordre de Saint-Michel de Bavière, de l'Académie royale des Sciences, Professeur de Minéralogie au Jardin du Roi et à la Faculté des Sciences de Paris, de la Société royale de Londres, de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg, des Académies royales des Sciences de Berlin, de Stockholm, de Lisbonne et de Munich; de la Société Géologique de Londres, de l'Université impériale de Wilna, de la Société Helvétienne des Scrutateurs de la Nature, et de celle de Berlin; des Sociétés Minéralogiques de Dresde et d'Iéna, de la Société Batave des Sciences de Harlem, de la Société Italienne des Sciences, de la Société Philomatique de Paris, etc.

TOME PREMIER.

PARIS,

BACHELIER ET HUZARD, GENDRES ET SUCCESSEURS DE Mme Ve COURCIER, LIBRAIRES POUR LES SCIENCES,

Rue du Jardinet-Saint-André-des-Arcs.

1822.

SW

548
H368
V.1
430832

J M STILLMAN
307

INTRODUCTION.

La théorie, dont le développement est le principal objet de ce traité, touchait de près à sa naissance lorsque j'en ai publié, il y a environ trente-sept ans, les premiers résultats dans un ouvrage où je ne donnais mon travail que pour un simple essai, qui avait besoin d'être soumis à de nouvelles recherches pour qu'il fût permis de le ranger parmi les genres de connaissances dont le sort est fixé sans retour.

Je n'avais appliqué ma théorie qu'à un petit nombre d'espèces, et j'avais employé des méthodes particulières, soit pour déterminer les angles des cristaux qui appartiennent à ces espèces, soit pour vérifier les propriétés géométriques dont quelques-uns m'avaient offert les indices.

L'espérance que ces premiers résultats m'avaient fait concevoir pour la suite, s'est réalisée. Les nombreuses applications que j'ai faites des lois de la structure, et que j'ai consignées dans le Traité de Minéralogie, qui a paru en 1801, et

depuis, ont
orie dont il
de plus en plus
gre de généra-
alytiques si bien
54 ences, à l'aide
H3 ts, qui diffèrent en
nement se ranger
eur sert comme de

que je me suis pro-
auquel l'ont amenée
et la perfectionner. Je
plan que j'ai suivi, comme
faciliter l'étude.
problémes d'analyse, dont
er la marche de la nature
ats par des méthodes très
résultats souvent inattendus
nous même excitent notre sur-
paradoxe sous lequel ils se pré-
que, guidés par le simple raison-
nous revenons ensuite pas à pas sur la
calcul avant franchie rapidement
par apercevoir la manière d'agir
qui ont donné naissance aux résultats
Il s'agit L'étude de la Cristallographie a sur-
l'avantage de se prêter aux conceptions de ce
genre. Les cristaux etant des assemblages de mo-

INTRODUCTION.

...res soumises à certaines lo...
..., les projections qui les repré...
...t de leçons parlantes pour un ob...
...tif, et cela est vrai surtout d'une ...
...dans laquelle les formes des molécu...
...olues par de petits solides d'un volume s...
Il en résulte que les faces du cristal qui en a...
le modèle, et qu'il offre sous l'aspect d...
continus, par une suite de l'extrême p...
des molécules, se montrent telles qu'elle...
réellement, c'est-à-dire comme des assem...
de bords ou d'angles solides situés sur les ...
molécules, et dont les alignemens et la dis...
retracent aux yeux de l'observateur la ro...
la cristallisation a suivie pour arriver à so...

C'est en partant de ces considérations ...
divisé l'exposé de la théorie en deux parties...
synthétique et l'autre analytique. Dans ...
mière, j'associe le simple raisonnement a...
jections des formes cristallines, pour rend...
sible aux yeux ce que la théorie montre à l...
ou si je me permets quelquefois l'usage ...
cul, c'est seulement dans le cas où il s'a...
résultat de cristallisation qui, indépenda...
de ce que le raisonnement nous en ap...
peut devenir l'objet d'une recherche intére...
comme celle qui aurait pour but de déte...
d'après certaines données qui se présentent ...
d'elles-mêmes, le nombre de petits sol...

a

minéraux avec les êtres organiques, qui me conduit à indiquer les différences remarquables qu'établit entre les uns et les autres la manière dont ils se forment et s'accroissent. Je donne ensuite une division générale des formes que l'on appelle *cristallines*, et remontant à la naissance des corps qui les présentent, et à l'ordre suivant lequel l'affinité a réuni leurs molécules, j'en déduis l'idée à laquelle est attaché le mot de *cristal*. Je fais ressortir un caractère distinctif très remarquable qui résulte de ce mode de formation auquel on a donné le nom de *cristallisation*, et qui consiste dans la faculté qu'ont les molécules d'un même minéral de donner naissance à une multitude de formes différentes, toutes régulières, tandis que les individus qui appartiennent à une même espèce de plante se ressemblent par la forme, le nombre et la disposition respective des organes de la fructification et par la manière d'être des autres parties, en sorte que chaque individu est censé représenter l'espèce entière.

Je donne ensuite une notion des formes cristallines, en me bornant à celles qui offrent les types des espèces, ou de celles qui sont comme les élémens dans lesquels elles se résolvent à l'aide d'une opération que je ferai bientôt connaître. Chacune des formes dont il s'agit étant susceptible de varier d'une espèce à l'autre par la mesure de ses angles, ou, ce qui revient au même, par les in-

présentatifs des molécules dont le cristal es
semblage.

La partie analytique renferme l'exposé
mules dont j'ai parlé plus haut, et de leur
soit pour déterminer les formes cristalli
tives à une même espèce, et pour les lie
avec les autres et avec la forme prin
elles dérivent, soit pour développer le
tés géométriques émanées de leurs di
de leur structure, qui ajoutent beauc
rêt qu'inspire par elle-même l'étude d
et dont on n'aurait peut-être jam
l'existence, si la théorie n'était v
avertir. Les calculs qu'elle emplo
que la connaissance de l'algèbre
il faut de l'exercice et une certai
assortir la construction des pro
thode de les résoudre à un suje
où la nature se montre si rich
géométrie qui n'est qu'à elle.
applications de la théorie, j'a
cher, parmi les différentes n
un même problème, celle q
et à n'y mettre que la juste
suffisait à mon but.

Je vais exposer, dans
le plan que j'ai suivi, en t
parties dont je viens de

Je commence la pre

its, je dirai com-
aux carbonatec,
e auquel il adhé-
une petite portion
cet endroit une in-
qui n'avait besoin que
e devint comme la clef
rai l'opération à l'aide de
de l'indication dont j'ai parlé,
hexaèdre régulier un rhom-
$^{d}\frac{1}{2}$ (1), qui lui servait comme
poserai les résultats de toutes les
même genre, auxquelles celle-ci a
e, ce qui m'a conduit au principe
de la théorie dont j'ai parlé. Il con-
e que tous les cristaux de diverses for-
appartiennent à un même minéral, ren-
un solide que l'on peut en extraire en
ant successivement toutes les lames qui le
uvrent, et dont la forme est constante tant
l'espèce reste la même, mais varie d'une es-
ce à l'autre. Les différens noyaux que la divi-
ion mécanique des minéraux a offerts jusqu'ici,
se rapportent à cinq genres de solides dont je
donne la définition.

---

(1) Cet angle est celui que forment entre elles deux faces prises vers un même sommet du rhomboïde.

clinaisons mutuelles de ses faces; pour déter
ner ces inclinaisons, et en général toutes c
qui existent sur les formes cristallines rela
aux différentes espèces, j'emploie un instr
qui porte le nom de *goniomètre*, et dont
l'invention à M. Carangeau. J'en donne
description détaillée, et j'indique la man
faire usage.

De là je passe aux variations que su
formes cristallines originaires d'une m
et particulièrement à celles qui ne
dentelles, en sorte qu'elles laissent
nombre et les inclinaisons respecti
et n'influent que sur leurs dime
figures, sans toutefois que la sy
Les variations dont il s'agit ont
les cristaux qui résultent de l
plusieurs formes simples qui
exister séparément parmi les
et elles proviennent de ce
d'un même ordre sont plus
gnées du centre dans tel
autre. Je fais voir que ces
vent être ramenées à un
dépend de la condition
les faces soit le plus s
je ne fais qu'ébaucher
y revenir avec plus d
tique.

...es,
... des
...tre sé-
...nalyse
...ortir ce que
...dre de très re-
...re ne pouvant
..., les trois formes
...eu du nombre et

faces, sont le
parallélipi-
ntes,

di-
que
erva-
en gé-
et de la
rige. Eco-
richesse et
tats.
t les molécules
s cristaux qui en
un nouveau de-
lles empruntent de
cevoir en quoi il con-
ne exemple le prisme
ré comme forme primi-
t le monde sait que si l'on
rayons, en allant du centre
vera sous-divisé en six trian-
or, il est visible que ces trian-
deux, composent des rhombes,
basc peut aussi être considérée
emblage de trois de ces rhombes.
Maintenant que l'on fasse passer par
ns des plans perpendiculaires à la base;

A la suite du résultat [illegible] prismes un autre qui lui est [illegible] de six continuant de pénétr[illegible] menés structure par la div[illegible] j'ai parlé; à ses différentes fac[illegible] posé que plans encore. Cett[illegible] raient pour lides, tous semblal[illegible] division du sous-divisions su[illegible] on que pres- tres de la même [illegible] de toutes les un moindre vol[illegible] ait lieu pa- puissions apere[illegible] les terminent, pour ainsi dire, l[illegible] des prismes ne pouvons d[illegible] que les applica- ceux que nou[illegible] nées du prisme jusqu'aux der[illegible] elles où les formes que j'appelle[illegible] sont des pris- sont réunies [illegible] la théorie relative pendues, po[illegible] son but, en faisant de l'opérat[illegible] qui résultent de *molécules* [illegible] égrantes, le même sont celles [illegible] ière primitive serait molécules [illegible] idal semblable à ceux parées l[illegible] La même corrélation a- chimiqu[illegible] les molécules inté-

Maint[illegible] et ceux où elles sont le résul[illegible] suite de ce que la marqu[illegible] èdres présente l'équi- pas av[illegible] ple. les plu[illegible] *soustractives* ces parallé-

...ules triangulaires ou de
...tôt que ce nom de *sous-*
...manière dont agissent en
...tructure, et qui m'a suggéré
...decroissement que je leur ai
...e qui précède que le paralléli-
...l'unité à laquelle viennent abou-
...ons de la théorie aux différentes
...es. Il lui est pour ainsi dire indif-
...e parallélipipède soit indivisible ou
...de se résoudre en parties fraction-
...marche est absolument la même dans
...as.

...tout ce que j'ai dit jusqu'ici, je n'ai consi-
...les résultats de la division mécanique des
...noyaux inscrits dans les cristaux, et les
...es sous lesquelles s'offrent les molécules in-
...grantes qu'elle retire de ces noyaux. Or, les
plans suivant lesquels chacun d'eux se laisse divi-
ser, et que je nomme *joints naturels*, parce qu'ils
passent entre ses lames composantes, se prolon-
gent dans la matière enveloppante; d'où il suit
qu'elle n'est qu'un assemblage de molécules inté-
grantes semblables à celles dont le noyau est
composé; et c'est de l'ordre suivant lequel elles
sont assorties que dépendent le nombre, les fi-
gures et les inclinaisons respectives des faces qui
terminent le polyèdre auquel elles ont donné nais-
sance. J'ai exposé, avec le développement conve-

ils sous-diviseront le prisme hexaèdre en six
triangulaires égaux et semblables. Au lieu
plans, n'en supposons que trois qui soie
par les côtés intérieurs des rhombes dont
le prisme ne sera plus censé être cor
de trois prismes à quatre pans, qui a
bases les mêmes rhombes. Or, la
prisme hexaèdre, faite sous la condit
crit ce genre d'opération, à l'égard
formes primitives, et qui exige qu'
rallèlement aux différentes faces qu
donne pour molécules intégrant
triangulaires. Mais nous verrons
tions de la théorie aux formes d
hexaèdre régulier s'assimilent à
qu'elle considère comme primit
mes rhomboïdaux, en sorte q
au prisme hexaèdre remplit
jouer aux prismes rhomboï
la réunion de deux molécul
rôle que dans le cas où l
elle-même un prisme rho
dont je viens de parler
lieu entre les cristaux
grantes sont des tétra
des parallélipipèdes,
réunion de plusieur
valent d'un parallélip

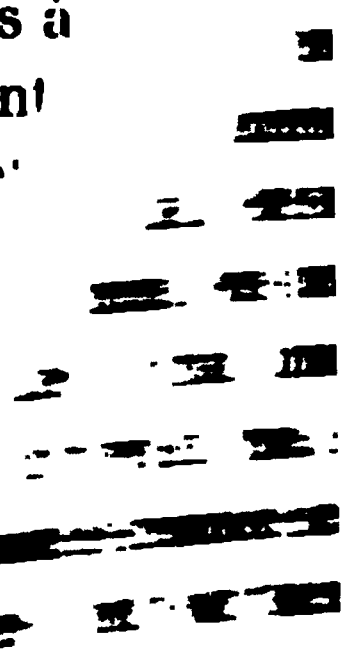
J'appelle *molécu*

...r
...ne
..., l'on
..., on ob-
...met py-
...es dont
...On remar-
...détache suc-
...tre sommet,
...olue à mesure
...suit que si on
...en commençant
...le noyau, elles
...qu'elles s'en éloi-
...les directions des
...dont il s'agit, on
...tantôt à ceux
...noyau, tantôt aux

…s lignes
…a-

…ait
…tue à
…ombre
…es, qui,
représen-
…ns que l'on
…me cube en
…térieures d'au-
… ébauche de la
…s le passage du
…ont je me propose
…ne sers d'une suite
…igure carrée, et dont
…de cubes égaux à ceux
…olécules intégrantes. Je
…couvrement, de manière
…emblable à une pyramide
…je place la base sur une des
…t bien évident que les cubes
…que lame sont distribués par
…es, parallèlement aux différens
…me. Or, tel est le rapport entre
… lames dont il s'agit, que la pre-
…n contour une rangée de moins que
…elle couvrirait entièrement la face
…nte du noyau. Chacune des rangées

même espèce de minéral sont su
r. Je vais donner ici une idée d
mieux en faire concevoir la m
pplication à un exemple très
ai d'une variété qui appartie
éral que j'ai nommée *aplom*
divisant mécaniquement u
aire le noyau, on fait atte
rtics de la matière enve
pour mettre ses faces à
qu'elles se terminen
l, ou en un somme
ont séparées par u
le plus que les lam
ment en partant d
ient progressive
pproche du no
nd dans l'ord



que les
doi-
par
sa vé-
les faces
bles.
thétique, un
ucture de ce do-
viendra sensible à
qui le montrera cir-
représentera en relief
croissantes qui le recou-
formule dont on pourra
de tous les petits solides cubi-
omme molécules intégrantes,
re est l'assemblage, en supposant
isse le nombre d'arêtes de molécule
chaque bord du noyau.

les bords des lames décroissantes sont
ers les diagonales des faces du noyau,
écules disposées sur plusieurs rangées
ssives, dont les premières sont contiguës
mêmes bords, ne se réunissent plus par une
leurs faces; elles ne se touchent que par une
rête. C'est une suite de ce qu'elles s'engrènent
les unes dans les autres dans le sens où nous
les considérons ici. Du reste, les quantités dont
les lames décroissantes sont dépassées les unes
par les autres ont toujours pour mesure une ou

ordinaires font leur jonction sur une arête commune, en sorte que leur figure est celle d'un trapèze dont le petit côté coïncide avec cette arête. C'est ce qui a lieu par exemple dans une partie des cristaux de baryte sulfatée. Or, si l'on compare entre eux plusieurs de ces cristaux, on observera que la longueur de l'arête terminale augmente ou décroît de l'un à l'autre, et cela dans un rapport très sensible. Mais la théorie donne la limite à laquelle elle s'arrêterait toujours si la cristallisation atteignait constamment le but vers lequel elle tend, et dont elle ne s'écarte que par l'effet des variations accidentelles que subit l'ordre de la structure. Je donnerai le développement convenable à ce point de théorie, et je déterminerai, à l'aide d'une formule générale, la limite dont je viens de parler.

Dans les cristaux ordinaires, les arêtes situées à la jonction de deux faces produites par une loi de décroissement, ou bien sont des lignes pleines, comme lorsque le décroissement agit dans deux sens opposés sur un des bords du noyau, ou bien sont des suites d'angles solides ou d'arêtes de molécules situées dans un même plan et qui étant d'une extrême petitesse, se présentent sous l'apparence de lignes pleines.

Il en est autrement du prisme hexaèdre régulier de la chaux carbonatée, dont on extrait le rhomboïde primitif de cette substance minérale.

plusieurs des mêmes rangées, et il
formes secondaires aussi simples
sont produites par les décroiss
bords. De ce nombre est l'octa
ginaire du cube.

Quant au troisième cas, où l
décroissantes ont des directio
entre celles des bords du
nales de ses faces, je me
les petits solides que la the
étant les élémens de c
semblages de 2, 3, 4
davantage, lesquelles s
simples, en s'alignant
rangées successives
à l'action des lois
secondaires.

En étudiant les
décroissement d
conduit à diver
sent mériter d
se rendre con
concourt au
en citer deu

Il existe
d'un octaédr
que deux d
met, au lie
en un mê

aux cris-
de décrois-
la structure
uel se suc-
la matière
nt obligé
ecos initiales
ux commence
rme, où l'au-
ls agissent si-
arrête à l'en-
vers exemples
dans les dé-
une juste idée de
la structure des

que j'appelle *auxi-*

rsque ceux qui agissent
faces du noyau, adjacentes
r les trois faces qui concou-
d'un même angle solide,
des lois différentes, ont de
les deux ou les trois faces
en résultent coïncident sur un
lus, il peut arriver, et il arrive
uvent, qu'un des décroissemens
lus que l'autre ou les deux autres
he composée, soit à raison de la
rangées soustraites, soit parce qu'ils
vertu de ces assemblages de molé-
les dont j'ai parlé plus haut. Dans ces
cas, on considère le décroissement
comme le principal, et celui qui seul
ne la position de la face secondaire
te, et les autres ne sont censés intervenir
our seconder l'effet du premier, et pour
nger la face dont il s'agit au-delà du bord
de l'angle auquel on rapporte le premier,
mme à son terme de départ.

Les applications de la théorie, qui font le sujet de l'article suivant, me paraissent déjà très dignes d'attention, dans le cas même où elles ne seraient que spéculatives. Mais elles deviennent doublement intéressantes par l'avantage qu'elles ont de servir à simplifier et à faciliter celles qui, considérées en elles-mêmes, sont les

La théorie prouve que ses faces latér
réunissent pas sur des lignes contin
sées telles, mais qu'elles sont sé
facettes rectangulaires, dont la
petite, qu'elle échappe à nos
sulte que le prisme considéré
lois de la structure, est ré
en sorte que le nom de
prime que ce que l'ob
gards, et ne s'accorde
des choses que la
pensée.

Une autre co
taux qui sont
sement ou d
de ce crist
cèdent le
qui enve
d'assig
des dé
par a
tre p
mult
droi
rela
tail
la
cr

INTRODUCTION.

[illegible] les lois particulières d'où [illegible] des cristaux. Pour en don- [illegible] deux manières d'être [illegible] des angles d'une forme pri- [illegible] *identiques* ne font [illegible] tels sont, par exemple, [illegible] qui ont la même longueur, [illegible] des faces également in- [illegible] La loi de symétrie con- [illegible] espèce de décroisse- [illegible] les bords ou sur tous [illegible] que ceux qui ne le [illegible] autre espèce de dé- [illegible] rester libres. Je cite di- [illegible] qui réalisent la distinc- [illegible] offrent de la loi de symétrie, [illegible] celles qui naissent des autres [illegible] pour démêler dans l'as- [illegible] pour la première fois, [illegible] laquelle se rapporte sa forme [illegible] encore que la ressemblance [illegible] qui naît de la réflexion de [illegible] des cristaux naturels des cristaux, [illegible] qui s'accordent avec celles [illegible] et de celles qui ne le sont pas.

En lisant les traités de Minéralogie publiés par les auteurs étrangers, on trouvera qu'une partie [illegible] qu'ils ont données des formes [illegible] ne soutient pas l'épreuve de la loi

de symétrie, qui est comme la pierre de touche de ce genre de résultats, et on aura lieu de s'étonner que des hommes aussi attentifs qu'éclairés, aient méconnu une loi si simple et qui se présente si naturellement à l'esprit. J'ajoute que nous ne pouvons regarder autour de nous sans la rencontrer. Les artistes l'observent scrupuleusement dans leurs ouvrages, en assimilant les parties qui se correspondent, par les formes qu'ils leur donnent et par les ornemens dont ils les embellissent. Ils ramènent tout à ce principe, qu'il faut que l'œil soit satisfait; et sans qu'ils s'en aperçoivent, leur art ne fait ici autre chose que d'imiter en quelque sorte ce que la science nous montre dans les productions de la nature.

La distinction que nous avons admise entre le noyau d'un cristal et la matière qui l'enveloppe, n'est qu'une donnée dont se sert la théorie pour déterminer les lois auxquelles est soumise la structure des cristaux secondaires; mais le noyau n'est pas le terme auquel arrive d'abord la nature, comme d'un seul jet, pour ajouter ensuite successivement à son volume les lames dont la matière enveloppante est l'assemblage; c'est le centre du cristal qui est son véritable point de départ, et c'est là qu'elle fait naître un embryon de ce cristal, qui déjà renferme un noyau composé du plus petit nombre possible de molécules intégrantes, et a subi l'effet initial de la

aux résultats de toutes les lois particulières d
dépendent les formes des cristaux. Pour en
ner une idée, je distingue deux manières
relatives des bords et des angles d'une for
mitive. Ceux que j'appelle *identiques*
qu'un au jugement de l'œil : tels sont, par
deux bords opposés qui ont la même
et sont compris entre des faces é
clinées l'une sur l'autre. La loi de
siste en ce qu'une même espèce
ment se répète sur tous les bo
les angles identiques, tandis qu
sont pas peuvent subir une
croissement, ou même rest
verses formes cristallines q
tion que je viens d'énonc
indications qu'elles offre
et en général toutes cell
formes, peuvent être u
pect d'un cristal qui se
l'espèce de solide à
primitive. Je fais v
ou la diversité d
la lumière sur
fournit des indi
des parties ide

En lisant le
les auteurs é
les détermi
primitives

dans ses véritables limites, il faut s'en
que nous apprend la théorie, et à ce
manière d'agir familière à la nature sem-
le-même nous dire, que les décroissemens
les plus ordinaires sont en même temps les plus simples, et que les plus rares ne s'écartent de la simplicité des premiers que jusqu'à un terme peu reculé, en sorte que tout ce qui est au-delà doit être jugé impossible; or, en me bornant à ceux dont j'ai parlé d'abord, et en supposant qu'ils aient lieu par 1, 2, 3, 4 rangées sur les bords ou sur les angles d'un rhomboïde, tel que celui de la chaux carbonatée, je démontre, à l'aide d'une formule, que dans cette hypothèse, le nombre des formes possibles est de 83286o4. Je suis éloigné de croire que toutes ces formes existent dans la nature; il y en a sûrement une grande partie qu'on ne verra jamais qu'à travers la théorie. Ma collection en renferme à peu près 160 qui sont les seules que j'aie observées. M. le comte de Bournon porte à 620 le nombre de celles dont il donne la détermination dans son Traité complet de la chaux carbonatée et de l'arragonite, ouvrage qui fait honneur en même temps à l'étendue et à la variété de ses connaissances. Mais, en supposant que nous ayons sous les yeux toutes celles qui ont été produites par la cristallisation dans les cavités souterraines où elle a joui de sa liberté, on ne peut douter que le nom-

pouvoir seule
alculs qu'elle em-
nnaissance de l'Al-
il est facile de parvenir
ne mettre à la portée de
ent faire une étude suivie
enferme, j'ai exposé, relati-
pération, la marche progressive
quelle je suis arrivé de l'équa-
servi à construire le problème, à
n donne la solution, et j'ai évité d'y
s lacunes que les géomètres exercés au-
usément remplies, en faveur des commen-
qui auraient pu être embarrassés pour re-
uver le fil de l'opération.

Parmi les cinq formes primitives données par la division mécanique, je choisis d'abord le rhomboïde, comme objet de la méthode dont il s'agit. Il doit cette prérogative à la chaux carbonatée, à l'égard de laquelle cette forme est d'une fécondité pour ainsi dire inépuisable. Je détermine d'abord les rapports entre les diagonales et autres lignes qui entrent dans la construction du solide, et dont on déduit les valeurs de ses angles plans et saillans. Je m'occupe ensuite successivement des diverses espèces de décroissemens qui, en agissant sur les bords et sur les angles du rhomboïde primitif, produisent les formes secondaires. Je donne des formules générales toutes préparées

l'analogique qui mérite doublement de fixer l'attention, soit lorsqu'elle se laisse reconnaître du premier coup d'œil aux caractères de symétrie dont la cristallisation l'a ornée, soit lorsqu'elle se fait chercher dans les hémitropies qui la déguisent. Je dois dire aussi un mot des problèmes à double solution, dont le rhomboïde présente les sujets. Je citerai pour exemple le cas où deux rhomboïdes secondaires, semblables entre eux, naissent de deux décroissemens en sens contraire sur un même angle du rhomboïde primitif. La limite des cas de ce genre est celle qui a lieu, en vertu d'un seul décroissement, qui produit un rhomboïde secondaire semblable au noyau. La Cristallographie a réalisé ce résultat dans deux variétés, dont l'une appartient à la chaux carbonatée et l'autre à la tourmaline. Je me borne à ce peu d'exemples que j'ai choisis parmi le grand nombre de ceux que je pourrais citer. Ils seront développés dans la partie analytique, et j'ose espérer qu'ils contribueront à faire accueillir la théorie à laquelle on doit la connaissance de ces propriétés, qui me paraissent en rendre l'étude à la fois plus attrayante et plus instructive, et qui auraient probablement échappé pour toujours à notre géométrie, si elles ne s'étaient rencontrées dans celle de la nature.

Avant d'en venir à l'objet principal de l'article suivant, qui est la théorie du cube, je donne la

ment qui soit susceptible de produire le dodécaèdre régulier de la géométrie, et ici se présente une réflexion : c'est que les lois de décroissement d'où dépend la forme de celui qui appartient au fer sulfuré, sont à la fois les plus simples et les plus régulières possibles, d'où il suit qu'il doit être considéré comme étant le dodécaèdre régulier de la nature.

Vient ensuite le prisme rhomboïdal à base oblique, dont la théorie se rapproche jusqu'à un certain point de celle du rhomboïde, à l'aide d'une propriété géométrique qui est générale pour tous les solides primitifs de la même espèce. L'effet de cette propriété est de limiter celle des dimensions du prisme, qui coïncide avec l'un quelconque de ses bords longitudinaux; de plus, elle donne naissance à d'autres propriétés, dont je déduis des formules générales applicables aux incidences des faces produites en vertu de tous les décroissemens qui peuvent avoir lieu, soit sur les bords, soit sur les angles de la forme primitive. Ces propriétés, à leur tour, exercent une influence remarquable sur les résultats de certains décroissemens, qui se combinent de manière que l'assortiment des faces qui en dérivent s'offre sous un aspect symétrique, analogue à celui d'une pyramide droite, qui ne paraîtrait pas se concilier avec les positions obliques des bases du prisme, si la théorie n'en démontrait la possibilité. Je cite

[illegible] montrent réalisée [illegible] secondaires, dont les unes [illegible] et les autres au py-[illegible]

[illegible] qui a beaucoup de rapport [illegible] le prisme rectangulaire [illegible] soit sur une arête perpen- [illegible] longitudinaux pris sur une [illegible] Tel est celui qui fait la fonc- [illegible] relative à l'égard des cristaux [illegible] m'a conduit à des considé- [illegible] pas omettre. Un de ces cris- [illegible] m'a été confié à une époque où ils [illegible] rares, offrait d'un côté sur [illegible] des faces qui ne se répétaient pas du [illegible] opposé. Un plan perpendiculaire à l'axe, [illegible] faisant mouvoir à la lumière [illegible] subie le cristal vers une de [illegible] avait fait croire que sa forme [illegible] prisme droit, et, dans cette hy- [illegible] à peine des sommets du cristal déro- [illegible] à la loi de symétrie, que le [illegible] des faces distinctes qu'elle présentait [illegible] les existaient sur une partie et les [illegible] sur la partie opposée. Des observations [illegible] relatives à un autre cristal dont je donne [illegible] ont fait reconnaître l'existence [illegible] d'un second plan, incliné d'environ 40_d sur le premier, et qui doit être considéré comme offrant

la véritable base de la forme primitive. En le combinant avec l'autre, on a la forme de la molécule intégrante, qui est un prisme droit triangulaire. Dès-lors le défaut de ressemblance entre les deux parties d'un même sommet s'expliquait comme de lui-même; et au lieu qu'il avait paru d'abord fournir une arme pour attaquer la généralité de la loi de symétrie, il offre aujourd'hui un des exemples les plus décisifs que l'on puisse citer en sa faveur.

Dans les articles qui suivent, je traite des formes primitives qui diffèrent du parallélépipède. La première qui se présente est le prisme hexaèdre régulier, que l'on peut considérer, d'après ce que j'en ai dit dans l'analyse de la partie synthétique, comme un assemblage de petits prismes rhomboïdaux, qui, dans les résultats des lois de la structure, s'assimilent aux molécules intégrantes données par la sous-division des parallélépipèdes dont j'ai parlé précédemment. Je donne des formules générales pour la détermination des diverses formes secondaires qui naissent des décroissemens sur les bords ou sur les angles du prisme hexaèdre. Les variétés que j'ai choisies pour y appliquer ces formules, appartiennent, les unes à l'émeraude et les autres à la chaux phosphatée. J'exposerai une considération théorique relative à la combinaison de deux décroissemens qui agissent simultanément, l'un sur les bords et l'autre sur les angles de la base

des observations qui nous la [illegible] rangées dans plusieurs formes secondaires de ce- appartiennent à l'amphibole [illegible] elle est roxène. [illegible] de leur

Un autre prisme qui a [illegible] remplace avec le précédent, est [illegible] métriques oblique, dont la base [illegible] variétés, diculaire à deux bords [illegible] croissemens même face latérale. [illegible] et les qua- tion de forme prim[illegible] autre variété, d'euclase, dont l'ét[illegible] rapport est re- rations que je ne [illegible] mais ici le qua-, taux, qui m'ava[illegible] suite du rapport étaient extrêm[illegible] et la hauteur du son sommet d[illegible] forme primitive. côté opposé. [illegible] rombes, auquel je que j'avais a[illegible] détaillé que j'ai une fractur[illegible] la partie synthétique, ses extrém[illegible] rhomboïdes, dont primitive [illegible] tétraèdres à triangles pothèse, [illegible] les molécules inté- geait d'[illegible] rhomboïdes qui com- nombre [illegible] les quatre dont je viens de de seize [illegible] petits prismes rhomboïdaux six au[illegible] en expliquant la structure récent[illegible] nombre, c'est à-dire qu'ils la de[illegible] molécules simples dans les ré- d'un [illegible] qui naissent sur les pre[illegible] les angles du dodécaèdre.

, sous un même point de
s relatives aux différentes
r forme primitive le dodé-
t; mais en les étudiant d'une
ofondie, j'ai reconnu qu'elles se
deux systèmes de cristallisation,
ui du grenat, et l'autre celui du zinc
pose les caractères qui distinguent
s l'un de l'autre, et dont chacun dé-
relativement aux variétés qui s'y rap-
une marche particulière des lois de la
c. Je vérifie ce double emploi de la même
primitive par des applications à des variétés
tes dans l'une et l'autre des espèces désignées.
sieurs de celles qui appartiennent au zinc sul-
é sont d'autant plus remarquables, que l'in-
luence du système de cristallisation s'y montre
jusque dans ce dérangement de position qu'ont
subi les cristaux que je nomme *transposés*, et
qui cache ici, sous l'air d'un simple accident, le
résultat d'une propriété constante du mécanisme
de la structure.

Mon Traité de Minéralogie n'offrait qu'une ébauche imparfaite de la théorie de l'octaèdre. Je m'étais contenté de ramener la structure de ce solide à un assortiment de petits tétraèdres, qui offrait l'équivalent d'un assemblage de parallélépipèdes, et de faire entrevoir comment on pouvait substituer à l'octaèdre un parallélépipède

semblable à celui dont je viens de parler ; mais pour remplir le but de la théorie, il fallait trouver une méthode analytique, à l'aide de laquelle on pût transformer les décroissemens relatifs à l'octaèdre en ceux qui leur répondaient sur le parallélépipède substitué. Une autre relation du même genre entre l'octaèdre et un noyau hypothétique, tel qu'un prisme droit rhomboïdal ou rectangulaire, sollicitait une seconde méthode, plus favorable que la précédente aux applications de la théorie. M. Delafosse a bien voulu, à mon invitation, se charger de ce travail ; et la communication qu'il m'en a donnée, après qu'il l'a eu terminé, m'a fait connaître que mon attente n'avait pas été trompée. Ses formules joignent au mérite de la généralité celui d'être en même temps très simples. Je suis d'autant plus flatté d'associer ici ses résultats aux miens, que je ne pouvais saisir une plus belle occasion pour témoigner combien je me félicite de ce qu'un collaborateur aussi recommandable sous tous les rapports, ait été l'un de mes anciens élèves qui se soit le plus distingué par l'activité de son zèle et par la rapidité de ses progrès (1).

---

(1) M. Delafosse s'est formé à l'aide de l'excellente éducation que l'on reçoit dans l'Ecole normale, dont la direction a été si dignement confiée à la sagesse et aux lumières de M. Guenneau de Mussy.

Le tétraèdre régulier, qui se présente ensuite, peut être assimilé à l'un ou l'autre des sommets d'un rhomboïde, dont les angles plans sont de 120 d et 60 d, qui aurait été coupé par un plan perpendiculaire à son axe. Sa théorie rentre dans celle de ce rhomboïde, par une suite de ce que l'assortiment des molécules intégrantes tétraèdres équivaut à un assemblage de petits rhomboïdes semblables à celui dont il s'agit. Je donne des formules générales pour la détermination des résultats relatifs à cette manière de voir, et j'en fais diverses applications à des formes que j'ai choisies parmi les variétés du cuivre gris. Plusieurs de ces formes, qui, considérées relativement au nombre et aux inclinaisons respectives de leurs faces, ont leurs analogues dans l'espèce du grenat, en diffèrent sensiblement par l'aspect sous lequel se présente l'ensemble de ces mêmes faces. Je fais voir que cette différence s'explique facilement par celle qui existe entre les deux formes primitives et entre les systèmes de cristallisation qui leur appartiennent.

J'ajoute ici un article relatif au dodécaèdre composé de deux pyramides droites réunies base à base, dont j'avais fait d'abord une forme primitive particulière, qui se trouvait placée à la suite des cinq que j'ai décrites dans les articles précédens. Je motive l'idée que j'ai conçue plus récemment de lui faire changer de rôle, et à laquelle j'ai

rotation est situé perpendiculairement à l'axe du cristal hémitrope, et alors on peut supposer, pour plus de simplicité, que la moitié de cristal qui est censée avoir tourné, ait décrit seulement un sixième de circonférence. Je substitue, dans ce cas, le mot de *transposition* à celui d'*hémitropie*, et je fais voir que le plan de rotation est parallèle à une face qui résulterait d'une loi très simple de décroissement.

Un autre accident, qui est extrêmement commun, est celui qui m'a fourni le sujet de l'article suivant. Il dépend de la manière dont les cristaux groupés paraissent se pénétrer, par une suite du croisement de leurs axes. Dans la plupart des substances, les positions relatives de ceux qui offrent cette pénétration apparente varient, pour ainsi dire, à l'infini; mais il en existe quelques-unes, telles que la staurotide, l'étain oxidé, l'arragonite, etc., qui présentent un genre d'assortiment caractérisé par la disposition respective des cristaux qui le composent, en sorte qu'elle a lieu sous des angles constans dans chacune des variétés auxquelles elle appartient. Dans toutes les modifications de ce genre, sans en excepter celles dont j'ai parlé d'abord, on peut toujours concevoir, à l'endroit où se fait la jonction des cristaux composans, un plan dont la position est parallèle à celle d'une face qui serait produite en vertu d'une loi de décroissement ordinairement simple, au moins

cité, et dans laquelle réside très probablement le véritable rapport, qui est celui de la nature. La méthode réunit ainsi au mérite de l'uniformité, qu'elle emprunte de sa marche, celui de cette simplicité qui caractérise ses résultats. De là résulte cet avantage que si plusieurs observateurs, qui auraient mesuré tour à tour un même angle, se dirigeaient d'après cette méthode, ils arriveraient à la même limite; au lieu que s'ils se réglaient sur les indications pures et simples de leurs mesures, les rapports auxquels ils seraient parvenus, comparés entre eux, se nuiraient l'un à l'autre par leur discordance.

Je place ici quelques résultats relatifs à un genre d'altération que subissent les variétés qui appartiennent à diverses espèces, par l'effet d'une cristallisation précipitée ; il consiste en ce que certaines faces se sont infléchies de manière à devenir convexes, et quelquefois la courbure s'étend sur toute la surface. Dans plusieurs cas, les traits de la forme originale, en se laissant entrevoir à travers les altérations dont il s'agit, permettent d'en ébaucher la détermination, lorsqu'on manque de cristaux assez réguliers pour l'obtenir avec précision. Je cite une variété de chaux sulfatée, qui s'arrondit par degrés, en allant d'un individu à l'autre, et finit par s'offrir sous la forme d'une lentille, et quelquefois sous celle d'un cône régulier. La division mécanique de ce cône, faite par un plan

qui existent entre elles sous
t. Les molécules intégrantes et
ucture sont comme si elles n'exis-
e passage aux formes secondaires est
par des sections faites dans la forme
ve, qui substituent des surfaces planes,
le niveau est purement idéal, à l'assortiment
s bords ou des angles solides de molécules, qui
termine au dehors le mécanisme de la structure.
La considération de ce mécanisme se borne à un
simple rapport entre les dimensions de l'espace
qu'il occupe.

L'avantage qu'ont les formules analytiques, de simplifier la détermination des formes secondaires en la généralisant, et de représenter les propriétés qui semblent leur donner un langage, disparaît dans l'usage d'une méthode technique de calcul, dont les principes tendent à réduire les corps qui portent le plus visiblement l'empreinte du travail de la nature, à la condition des solides géométriques, dont on a dit avec raison qu'ils ne sont que les fantômes des corps physiques.

Lorsque j'ai commencé à m'occuper de la détermination des formes régulières sous lesquelles une partie des substances minérales s'offrent à nos observations, je n'avais considéré mon travail que comme un moyen de donner une extension à la physique des corps naturels, en faisant de la géométrie des cristaux, qui jusqu'alors n'avait

perpendiculair [illegible] épars,
naturel, dont [illegible] la dé-
courbe à laq[illegible] de ceux
d'*hyperbol*[illegible]
indication : [illegible] es applica-
quels j'e[illegible] me l'on avait
ment étr[illegible] placer, d'a-
qu'il est [illegible] eux qui fai-
se prête[illegible] andis qu'ail-
Avai[illegible] ésignés l'un de
tique. [illegible] adoptées, se
bien [illegible] théorie.
grapl[illegible] dans l'origine
savi[illegible] l'aide des formes
par[illegible] molécules, pou-
ais[illegible] beaucoup d'avantage
pe[illegible] espèce à laquelle
ré[illegible] Après cette der-
c[illegible] mon Traité de Mi-
l[illegible] heures que j'ai pu
[illegible] tournées vers les
[illegible] distinction metho-
[illegible] négliger les co-
[illegible] CRISTAUX, en plaçant
[illegible] les variétés de
[illegible] elles étaient décrites
[illegible] des minéralogistes
[illegible]
[illegible] soit ou ne partagent,

ce n'est pas sur les principes de la théorie, considérée comme un moyen de représenter, à l'aide du calcul analytique, la marche de la cristallisation dans la production des formes régulières auxquelles elle donne naissance : ce que l'on a contesté à cette même théorie, c'est la justesse de ses applications à la méthode. Le but que je me suis proposé dans la troisième partie du Traité de Cristallographie que je publie aujourd'hui, a été de donner un grand développement aux considérations sur lesquelles est fondée la préférence que cette science me paraît mériter d'obtenir, pour donner des points fixes aux espèces, comme étant la seule dont les résultats, liés étroitement à la forme invariable des molécules intégrantes, se dérobent à l'influence des causes accidentelles qui altèrent l'unité de composition. Ces mêmes résultats deviennent par là susceptibles de cette détermination précise et rigoureuse d'où naissent l'évidence et la conviction qui en est la suite nécessaire.

Cette troisième partie est composée de neuf articles, dont je vais donner successivement les analyses.

Dans celle qui se présente d'abord, je remonte à la naissance des minéraux, et je déduis de ce qui se passe pendant la première époque de leur formation la définition de l'espèce minérale, dans laquelle je fais entrer non-seulement les qualités et les quantités respectives de leurs élémens, mais

deux rhomboïdes de différentes mesures d'angles, sont encore susceptibles, au moins dans certains cas, de fournir des caractères distinctifs. C'est ce qui a lieu lorsqu'en comparant ces formes, prises dans leur ensemble, on observe parmi celles qui dérivent, par exemple, de tel rhomboïde primitif, les résultats de certains décroissemens, lesquels ne se rencontrent pas parmi celles qui se rapportent à un autre rhomboïde, ou réciproquement. Les molécules intégrantes de chaque rhomboïde semblent être douées d'une faculté élective, qui détermine en elles une tendance particulière vers certaines lois et une sorte d'indifférence pour d'autres lois, quoiqu'aussi simples ou même plus simples que les premières. Je cite divers exemples qui confirment cette manière de voir.

Le quatrième article a pour but la solution d'une difficulté que l'on a opposée à la méthode de classification fondée sur la Cristallographie. Elle est tirée de ce que cette méthode, dans un certain nombre de cas, assigne une même forme primitive, et par suite une même forme de molécule, à des espèces minérales très différentes. Je me bornerai ici à indiquer sommairement les considérations qui me paraissent fournir la réponse, et auxquelles je donne un grand développement dans l'article relatif à ce sujet. J'avais observé depuis long-temps que les formes communes à diverses espèces sont de celles qui offrent comme

localités. J'explique ces diversités, en considérant que le liquide dans lequel étaient suspendues les molécules destinées à former des cristaux de tel minéral, renfermait en même temps celles d'une ou plusieurs substances étrangères, dont une partie s'est interposée entre les premières, sans nuire à leur tendance pour obéir aux lois de leur propre cristallisation. Je développe les considérations qui naissent de cette cause de divergence entre deux sciences, dont l'une opère souvent sur des mélanges, tandis que pour l'autre tous les minéraux sont purs. J'expose un résultat remarquable qui sert à préciser l'idée que l'on doit attacher au mot de *mélange*, et auquel le célèbre Berzelius a été conduit par ses belles recherches sur la composition des minéraux, ramenée au principe des proportions définies. Il consiste en ce qu'il est possible que les molécules dont un minéral est mélangé, forment, par leur réunion, un ou plusieurs composés particuliers, sans que le minéral cesse de se montrer sous la même forme. Dans d'autres cas, la combinaison intime de toutes les molécules qui ont concouru à la formation du minéral constitue une espèce distincte, et cette circonstance est encore indiquée par le changement qu'a subi la forme, et qui lui imprime un caractère distinctif. Je cite divers exemples relatifs à ces différens cas, et je termine par celui

portent certains minéraux, qui sont
ges de plusieurs composés, dont cha-
exister ou même existe séparément,
il se trouve classé dans la méthode
qui lui convient. Les chimistes ont
ras du choix, en considérant ces as-
mme produits par une combinaison
uelle ont contribué les molécules de
posés, et d'où résulte une espèce
tière. Mais la Cristallographie prouve
encore unis que par voie de mélange,
l'un d'eux qui communique à l'en-
ractère de sa propre forme; d'où il
lui qui détermine l'espèce à laquelle
minéral.

e je me propose dans le huitième ar-
disculper certains résultats de la Cris-
da reproche de ne pas s'accorder avec
lyse chimique. Tel est le cas où deux
dans lesquelles la forme de la molé-
le est absolument la même, et de plus
limite, ne diffèrent que par le rap-
principes composans, tel que le
se. Dans le même cas, les indica-
ctères physiques viennent à l'appui
se tirent de la forme cristalline; d'où
si le principe des proportions défi-
s'opposer au rapprochement des deux

substances, c'est l'effet d'une de ces anomalies de l'analyse, dont on pourrait citer de nombreux exemples.

Avant d'en venir à l'objet principal du neuvième article, j'expose les diverses circonstances qui se présentent successivement, lorsqu'en parcourant le globe, on observe à la fois la nature des roches dans lesquelles sont engagés des cristaux, dont la formation a eu lieu simultanément avec celle de ces roches, et les formes sous lesquelles ils se montrent. Parmi ces circonstances, il en est une qui paraît être inattendue, et sur laquelle je m'arrête de préférence, comme offrant une nouvelle preuve d'autant plus remarquable des avantages de la Cristallographie, relativement à la distinction des espèces minérales, que cette science a ici à lutter en même temps contre la méthode dont l'analyse fournit les bases, et contre celle qui est fondée sur le témoignage des sens, et dont le célèbre Werner est l'inventeur.

La circonstance dont il s'agit est celle où des substances situées dans des terrains très différens, et entre lesquelles le contraste des caractères extérieurs a indiqué une ligne de séparation dont l'analyse paraît avoir confirmé l'existence, viennent se toucher, par la ressemblance parfaite qu'ont entre elles les formes de leurs molécules intégrantes. Je choisis pour exemples des variétés

à l'autre, en passant insensiblement de l'état de cristallisation régulière et nettement prononcée, qui les montre dans toute leur perfection, à celui où elles n'en offrent plus aucune trace, et où le minéral prend le nom de compact. J'indique un certain nombre de caractères, dont la plupart sont tirés des propriétés physiques, et quelques-uns des propriétés chimiques, qui peuvent servir à faire reconnaître les minéraux, lorsqu'ils se refusent à l'application des caractères géométriques. Je me borne à ceux qui sont encore inédits, ou qui se trouvent épars dans différens Mémoires que j'ai publiés depuis quelques années, mon but n'étant que de donner quelques exemples des moyens qui me paraissent mériter d'être employés de préférence, pour suppléer, jusqu'à un certain point, à l'absence de la forme, comme étant inhérens aux molécules intégrantes.

Le onzième article, qui est le dernier, renferme une histoire abrégée des progrès qu'a faits la Cristallographie depuis environ trente ans, soit en reculant les limites de la théorie, par de nouvelles applications des lois de la structure, soit en remplissant des vides sur le tableau de la méthode, par de nouveaux résultats relatifs à la distinction des espèces. Un des plus remarquables parmi ces derniers, qui est très récent, est celui qui se rapporte au cuivre dioptase et au cuivre

·caractère de symétrie qui a fixé
choisirai, comme exemple, celle
tée la dernière à son observation.
dont il s'agit consiste en ce que les
de certaines faces, avec celles qui
,acentes vers un même sommet, sont
·utre elles. M. de Monteiro représente
aison des lois de décroissement d'où
·e caractère, par une formule générale,
aquelle on détermine immédiatement dans
e cas particulier la loi relative aux faces qui
t l'empreinte du caractère. Je me dispense-
d'autant plus d'entrer à cet égard dans de plus
nds détails, que deux Mémoires, où le savant
teur a développé lui-même les résultats auxquels il est parvenu, ont été publiés dans un ouvrage périodique très connu (1), à l'aide duquel ceux qui sont en état d'apprécier ces résultats ont pu juger par eux-mêmes de tout l'intérêt que mérite d'inspirer le travail qui en est l'objet.

J'ai déjà parlé de l'avantage qu'ont les projections des formes cristallines d'en faciliter l'étude; mon but, dans la quatrième partie de cet ouvrage, a été d'exposer la méthode qui m'a paru la plus simple pour tracer ces sortes de portraits de

(1) Journal des Mines, vol. XXXIV, pag. 161 et suiv., et Annales des Mines, 1820.

hydraté silicifère, que [illegible] élémen
gardé comme n'en étan[illegible]ent serv
et qui s'en rapproche [illegible]açu l'idé
pare les deux substa[illegible]ccuper d
formes cristallines, [illegible] objets, c
duit de cette con[illegible]sure que le
compatibles dan[illegible]ent, n'a é

Parmi les ré[illegible]e mes élèv
grès de la Crist[illegible] projection
ont eu pour l[illegible]e propose
justesse à la d[illegible]avec le dév
à l'aide des [illegible]e les cristall
nettement [illegible]x formes cr
à mes pre[illegible]s, dont ils
hommag[illegible]ptions acco
pour la [illegible]
tage de [illegible]ne méthode
est par[illegible]ière, et à laqu
Plusie[illegible]ve. Elle consi
tait d[illegible]e surface pla
de p[illegible] paraissent à t
telle[illegible] On suppose q
feld-[illegible] plan situé ve
M[illegible]*Ideal*, et le
fou[illegible]ce plan un de
ap[illegible]e avec l'objet,
de[illegible]l par ses diffé
va[illegible]ases directions que

nt de cet objet. Il est clair
u fond de l'œil par les pre-
xactement semblable à celle
uent fait naître. Car tout dé-
e gardent entre eux les rayons
ls entrent dans l'œil. Le reste se
son insu.

exposé les causes de l'illusion que
rspective, je ferai connaître la mé-
projections que j'ai adoptée de préfé-
r remplir le même objet. Elle ne diffère
rspective qu'en ce que l'objet auquel elle
orte est censé être vu à une distance infi-
nsorte que les rayons partis de ses différens
nts sont parallèles entre eux. On verra que si
e représente les formes cristallines sous un
aspect moins séduisant, elle a sur l'autre l'a-
vantage d'être plus favorable à leur étude.

Cette méthode, considérée dans ses applications, suit une marche particulière, assortie à son objet. La géométrie descriptive, dont le célèbre Monge est le créateur, et dont il a fait de belles et nombreuses applications à la pratique de divers arts qui servent si utilement la société, refuse de se plier aux besoins de la Cristallographie. La première des opérations qu'elle exigerait aurait pour but de représenter immédiatement, sur un plan horizontal, la forme d'un cristal souvent

[illegible] divers sens, dont le [illegible] une variété de fer [illegible] modélique. Une opéra- [illegible] serait propre qu'à rebu- [illegible] aurait entreprise, par le [illegible] ennuie et fastidieux dans lequel [illegible]. L'autre méthode suit une [illegible] accessible, indiquée par la [illegible] est soumise la structure [illegible] de la forme du noyau, qui [illegible] et c'est son image que trace [illegible] sur le plan dont j'ai parlé. Cette [illegible] se [illegible] de deux autres, dont je don- [illegible] description détaillée, et dans lesquelles [illegible] des différens points de l'ob- [illegible] par degrés aux directions con- [illegible] que l'image produite par les [illegible] laisser de leur passage à [illegible] seul, se présente sous l'aspect qui [illegible] les positions respectives de l'objet [illegible].

[illegible] travaillant sur la projection de la forme [illegible], arrive à l'aide des opérations dont je [illegible] une idée, que l'on en déduit im- [illegible] les formes secondaires qui naissent [illegible] sur ses bords et sur ses angles. [illegible] par trois méthodes différentes. [illegible] construire sur le noyau les faces

des formes dont il s'agit, en y faisant passer des plans coupans dont les positions sont indiquées par les lois de décroissement d'où dépendent ces faces. Les intersections des plans dont il s'agit répondent aux arêtes du cristal qui sert de modèle, et l'on a les données nécessaires pour en tracer séparément le dessin sur le même papier, en menant des parallèles aux intersections désignées.

Une seconde méthode, à la fois plus simple et susceptible d'une plus grande précision, mais qui ne peut être employée que dans certains cas, est fondée sur les propriétés géométriques de la forme proposée. Les rapports que donne le calcul entre les dimensions de cette forme, indiquent les directions des principaux traits du dessin qui doit en offrir l'image, et le reste se présente comme de lui-même.

La troisième méthode est analogue à la manière de considérer un cristal de forme secondaire, en y distinguant deux parties, l'une constante, qui est le noyau, l'autre variable, qui est la matière enveloppante. On laisse subsister la projection de ce noyau, et l'on trace autour de lui les faces qui résultent des décroissemens sur ses bords ou sur ses angles. Il en résulte que la totalité du dessin représente ce noyau engagé dans la forme secondaire, conformément à la marche de la structure.

J'ai présenté les résultats des applications que

j'ai faites des trois méthodes que je viens d'exposer, à plusieurs variétés de formes, choisies parmi celles que présentent la chaux carbonatée, le pyroxène, la simple réfraction, l'émeraude, le cuivre gris, le chaux sulfatée et le grenat. Il sera facile de se faire une idée de la marche que j'ai adoptée pour chaque opération, comme étant celle qui me paraît la plus simple, en la suivant de l'œil à l'aide de la figure qui en offre le développement et la rendra plus intelligible que je n'en ai donnée.

J'ai eu fort souvent à résoudre un problème d'un autre genre, dont j'ai fait un grand usage. Le but que je m'y suis proposé était de répéter les mêmes tracés à des figures de cristaux tracées par une main étrangère. Pour y parvenir, il faut commencer à la naissance de ces opérations, et retrouver dans le plan du noyau dont j'ai parlé ci-dessus celui que l'auteur a dessinée l'auteur sur un plan différent. J'indique un moyen mécanique de la retrouver facilement à travers les traits de la projection qui en a été déduite à l'aide d'une opération différente.

Je remarquerai, en terminant cet article, que le sujet dont il vient d'être exposé étant susceptible d'une infinité de variations, on ne peut prescrire aucune règle précise sur la marche à suivre dans les opérations qui s'y rapportent. Les exemples que j'ai donnés serviront à initier celui qui les

aura bien conçus dans la pratique d'un art qui n'a point de terme; le reste dépendra de l'exercice et du travail. Souvent une étude attentive de ce qui a été fait, donne des idées sur la manière de se conduire dans ce qui se présente à faire, et rend ingénieux à se créer de nouveaux moyens d'application à mesure que le sujet s'offre sous de nouvelles faces.

Je n'ai rien négligé pour n'omettre dans ce Traité de Cristallographie aucun des moyens qui peuvent être employés à la détermination des formes cristallines, considérées sous le double rapport de la théorie et de la méthode. En profitant, pour remplir mon but, des résultats que j'avais insérés dans mon Traité de Minéralogie, je leur ai donné un grand développement et j'y ai fait des additions considérables. A plus forte raison ai-je lieu de craindre que mon nouvel ouvrage ne fasse renaître les réclamations que l'autre a excitées. On m'avait objecté que tous ces calculs, auxquels je paraissais attacher tant d'importance, ne servaient qu'à rendre la Minéralogie inaccessible pour une grande partie de ceux qui se proposeraient de l'étudier; qu'elle devait se suffire à elle-même, et que la Géométrie n'était entrée pour rien dans l'enseignement des hommes justement célèbres qui avaient fait faire de si grands progrès à la science, en se rendant clairs et intelligibles pour toutes les classes d'élèves. La meilleure ré-

j'ai faites des trois [illegible] qui seraient
ser, à plusieurs va[illegible], est de leur
celles que prés[illegible] eu le courage de
roxène, la bary[illegible] d'abord rencon-
gris, la chaux [illegible] devant eux
de se faire une[illegible] le terme, et ont
pour chaque [illegible] cette étude appro-
m'a paru la [illegible] propres à exer-
l'aide de la [illegible] meubler de con-
la descript[illegible] et utiles.

J'ai été [illegible]
d'un auti[illegible]
ut que
pérati
es j'
lait
ep

[illegible] ce moment doit servir à
[illegible] au Traité de Mi-
[illegible] la seconde édition, à
[illegible]. Ce Traité qui, je
[illegible] égards, sera composé
[illegible] in-4°. L'impression
[illegible] par les soins éclairés de MM. Ba-
[illegible], auxquels j'ai donné toute ma
[illegible] de notre Courcier.

TABLE ALPHABÉTIQUE
DES MATIÈRES
CONTENUES DANS LES DEUX VOLUMES.

(Les chiffres romains indiquent les tomes, et les chiffres arabes les pages.)

Accroissement des cristaux; manière dont il se combine avec leur structure, I, 224 et suiv.

Angles des cristaux, leur constance au milieu des variations que subissent les formes cristallines, I, 26.

Angles saillans, I, 7; manière de les déterminer, I, 22.

Angles plans, I, 7.

Arrondissement des cristaux par des causes accidentelles, II, 296.

Axe de cristallisation; ce que l'on entend par ces mots, I 8.

Bords identiques, leur définition, I, 8.

Bords (décroissemens sur les), I, 59.

Cause physique des lois de décroissement, I, 235.

Chaux carbonatée; réflexions sur la mesure des angles du rhomboïde primitif, II, 386.

Cristallographie; ses applications à la distinction des espèces minérales, II, 409 et suiv.—Histoire abrégée de ses progrès depuis trente ans, II, 565.

Cristaux; quels sont les corps auxquels on a donné ce nom, I, 5.

Cube; sa théorie mathématique, II, 1; formules générales auxquelles conduit cette théorie, II, 5; diverses applications de ces formules, II, 13.

Décroissemens (lois de); en quoi elles consistent, I, 53 et suiv. Décroissemens sur les bords, I, 59; — en largeur, I, 63; — en hauteur, *ibid.* Décroissemens sur les angles, et décroissemens intermédiaires, I, 111.

Décroissemens auxiliaires, I, 73.

Décroissemens (de la cause physique des), I, 235; — fécon-

...description, I, 22; manière de s'en servir, I, 24.
...les cristaux, II, 294; réunion des cristaux de stau-...306; de titane oxidé, II, 312; d'arragonite, 318.
...des cristaux; sa théorie, II, 272.
...égée des progrès de la cristallographie depuis en-...cente ans, II, 565 et suiv.
...originaire du cube; développement de sa structure ...de du calcul, II, 28 et suiv.
...dre régulier, impossible en Minéralogie, II, 31 et suiv.
...s naturels; corrélation entre leur aspect, dépendant du ...su qu'ils présentent à la lumière, et le rapport de leurs dimensions, I, 217. Joints surnuméraires, I, 244.
Lois de décroissemens; en quoi elles consistent, I, 53; leur fécondité dans une même espèce, I, 252; leur cause physique, I, 235.
Lois de décroissement; de leur coïncidence dans les variétés qui appartiennent à une même espèce, II, 518. Exemples remarquables de ces coïncidences dans les cristaux de pyroxène, d'amphibole, de tourmaline, etc., II, 522 et suiv.
Mélanges de matières étrangères dans les minéraux, II, 459. Influence des principes accidentels pour contribuer à la régularité des formes cristallines, II, 505.
Minéraux; qualités qui les distinguent des animaux et des plantes, I, 1; ils en diffèrent spécialement par la manière dont ils s'accroissent, I, 2. Des minéraux mélangés de matières hétérogènes, II, 459. Des minéraux dont les formes sont indéterminables, II, 548.
Molécules intégrantes, I, 44; manière de déterminer les rapports entre les principales dimensions des molécules intégrantes, II, 340.
Molécules soustractives, I, 51; offrent un moyen avantageux de généraliser la théorie relative à la structure des cristaux, I, 52.
Noyau, ou forme primitive des cristaux. Divers exemples de l'espèce d'anatomie à l'aide de laquelle on parvient à l'extraire d'un cristal, I, 31.

dité des lois de décroissemens, I, … …ux véritables
rect, I, 316; — inverse, *ibid.* …relatifs aux dé-
Dodécaèdre bi-pyramidal; sa définit…
Dodécaèdre bi-pyramidal; sa struc… …ie, I, 17; diffé-
de minéraux, II, 258. …t celle des prismes
Dodécaèdre régulier; pourquoi … …re, II, 212. Hypo-
logie, II, 23. …ques conduit à deux
Dodécaèdre rhomboïdal; sa déf… …ramenée à l'unité,
forme primitive il est réd… …. 222 et suiv. Diffé-
nique, en molécules inté… …gnes théoriques re-
théorie mathématique, II … …octaèdre, II, 228.
Dodécaèdre rhomboïdal ori… …autres, II, 229. Re-
veloppée par la synthèse… …les quatre quantités
Espèce minéralogique; sa … II, 231 et 232. Des
de la déterminer, II, 4… …octaèdre, II, 233.
Faces secondaires (du tra… …des lois de décroisse-
Fer spathique; observat… …ques, ou celles qui ont
II, 450 et suiv.
Formes cristallines; la … mathématique, II, 164
ment distinctes d…
point de partag… — rectangulaire, I, 14; —
Division de ce… …re irrégulier, *ibid.*
variations pur… …
mens qu'elles … …ure, II, 152.
telles, II, 2… …ure mathématique, II, 137,
Formes indét… …i de la base, II, 13; — sur
Formes comp… …es angles A, II, 145.
les espèces … …ure mathématique, II, 74.
géométrie … …ure solide, II, 72 et suiv.
gles de ce… …leur lieu sur les diverses
Formes des… …ristique, II, 59. Des dé-
Formes pri… …ordinaires, *ibid.* Des décrois-
division… …des de la base, II, 80. Des
mensio… …5, 86. Des decroissemens sur
lèces, … …décroissemens sur les bords

RES.

décroissemens sur l'angle O,
combinés, II, 123.
...ettre les cristaux en), II, 583
...nérales sur la manière de tracer les
...de la projection nivelée, II, 600. De
II, 607. De la projection des formes
... Diverses applications de la méthode,

...nition, I, 12; sa théorie mathématique,
...les concernant les rapports de ses principales
...entre elles, I, 282 et suiv. Des décroissemens or-
...ur les bords supérieurs du rhomboïde, I, 290.
...s relatives à la série des rhomboïdes qui dérivent
...des autres à l'aide de la loi B..., I, 299, Propriétés
...étriques qui résultent des décroissemens sur les bords
...rieurs, I, 302. Des décroissemens ordinaires sur l'angle
...périeur, I, 310. Des décroissemens sur les bords inférieurs,
I, 321. Propriétés générales relatives à ce mode de décrois-
sement, I, 326. Des décroissemens ordinaires sur les angles
latéraux, I, 348. Des décroissemens ordinaires sur l'angle
inférieur, I, 368. Relation entre les décroissemens directs et
les décroissemens inverses, I, 372. Formules relatives à la
série de rhomboïdes qui sont inverses l'un à l'égard de l'au-
tre, I, 400 et suiv. Des décroissemens intermédiaires rela-
tifs au rhomboïde, I, 438. Décroissemens intermédiaires sur
les angles E, x étant dans le sens de D, et y dans le sens
de B, I, 440. Décroissemens intermédiaires sur les angles
E, x étant dans le sens de B, et y dans le sens de D....,
I, 480. Décroissemens intermédiaires sur les angles e..., I,
489. Décroissemens intermédiaires sur d'angle A..., I, 510,
Formules pour la détermination des angles des formes se-
condaires composées, 566 et suiv.

Signes représentatifs des cristaux, offrant un moyen simple de
décrire les formes secondaires, et d'exprimer les lois de leur
structure, I, 257. Règles relatives à l'usage de ces signes, I, 276.

TRAITÉ

DE

CRISTALLOGRAPHIE.

PARTIE SYNTHÉTIQUE.

IDÉE GÉNÉRALE DES MINÉRAUX, ET DES CARACTÈRES QUI LES DISTINGUENT DES ÊTRES ORGANIQUES.

1. L'ASSEMBLAGE de tous les êtres qui habitent la surface du globe ou en occupent l'intérieur, a été partagé en trois grandes sous-divisions, dont chacune est distinguée des autres par des caractères qui lui sont propres. A la première appartiennent les animaux, qui, jouissant à la fois d'un principe de vie et de la faculté de sentir, dirigent à leur gré les divers mouvemens auxquels se prête l'admirable combinaison des organes dont ils ont été pourvus. Dans la seconde sous-division se rangent les plantes, qui ont aussi reçu en partage un principe de vie, mais qui sont privées de sentiment et de mouvement spontané. La troi-

Structure des cristaux; lois auxquelles elle est sou
En quoi elle diffère de l'accroissement, I, 22[illegible] ce des
dodécaèdre rhomboïdal originaire du cub[illegible] utre,
l'aide de la synthèse, I, 73. Du dodécaèdre [illegible] d'une
nales, I, 79. Du dodécaèdre métastatique [illegible] ent que
taèdre régulier originaire du cube, I, 1[illegible] es entre
Symétrie (loi de), I, 196; elle imprime le [illegible] istes ou
primitifs aux formes secondaires, I, [illegible]
suffisent, dans un grand nombre de [illegible] al capable
naître l'espèce de solide à laquelle [illegible] ous les au
primitive, I, 200 et suiv. Exem[illegible] le plus beau
anhydro-sulfatée, *ibid.* De l'idoc[illegible] puisque c'est
d'amphibole, I, 204. Du fer [illegible]
chaux sulfatée, I, 209.
Système de cristallisation; ce que l'[illegible] minéraux, éta
418. Des systèmes généraux [illegible] es règnes une
suiv. Des différences entre les [illegible] les animaux et
des formes primitives de la [illegible] ist par le déve
Tétraèdre régulier, I, 9; — s[illegible] parties de l'indi
trique, *ibid.*; — irrégulier [illegible] reçoivent les or
Tétraèdre régulier, est l'un[illegible] minéraux s'accrois
vées. Sa théorie mathém[illegible]
Théorie (des principes [illegible] juxta-position de
Transpositions des cris[illegible] surface. Leur for
Triacontaèdre; sa str[illegible] molécules qui s'ar
Triacontaèdre symét[illegible] um. De nouvelles
II, 57 et suiv.; [illegible] de l'enveloppent
de le construire [illegible] avec lequel elle est
Variations des fo[illegible] forme de même par
25. Variation[illegible] excentriques, qui se
toujours être [illegible] ajoute son volume à

FIN DE [illegible] les différences que pré-

..aux comparés aux animaux et aux
..nt de ceux-ci, qu'ils ont une organi-
..utres, qu'ils n'ont qu'une structure :
..ers, l'organisation suppose une combi-
..ves sans cesse en activité, un jeu con-
..utes les parties internes qui, par des
..diversifiées, concourent à la conservation
..lus. Le mécanisme de la structure au con-
..borne à un arrangement uniforme de molé-
..que l'affinité fixe à mesure qu'elle les amène, et
..tient ensuite enchaînées les unes aux autres;
..elles ont des mouvemens, ils sont accidentels,
..réduisent aux oscillations imperceptibles qu'oc-
..sionne dans ces molécules l'inconstance de la tem-
..rature, en faisant varier d'un instant à l'autre le rapport entre la force du calorique qui tend à les écarter, et celle de l'affinité qui agit pour les rapprocher.

3. Les minéraux composés, comme je l'ai dit, d'une matière morte, n'ayant ni physionomie ni langage, paraissent au premier abord, n'offrir qu'un léger degré d'intérêt aux personnes qui se proposeraient de les étudier, en comparaison de celui qu'inspirent les productions des autres règnes. Les animaux qui se rapprochent de l'homme par leur conformation, et dont une partie vit, pour ainsi dire, en société avec lui, semblent lui présenter un sujet d'étude beaucoup plus attrayant. L'aspect seul des plantes, qui se montrent de toutes parts à la surface de la terre dont

sième division, placée à une pro- ante &
précédentes que celle qui l- brutes
est remplie par les minéraux, dans
matière brute, insensible- parallèle
des assemblages de mo-
elles par cette force
donné le nom d'a- res rap-
d'étudier la nature, font
tres êtres à l'aide de- parce
présent qu'il ait ne- -
par elle qu'il en- égu-
2. La manière d'être
blit entre eux ... par-
nouvelle ligne ... a des
dans les plan- ... liées sur
loppement ... l'électricité et
vidu, à l'a- ... grand nombre
gaues des- ... être connus,
sent au ... aut les plus aux be-
particul- ... et enfin parce que
nation ... respectives dans
rangent ... nouvelle branche
molécul- ... aucoup à l'intérêt
en se f- ... lorsqu'on les étudie
en cont-
une su-
superp- *...dines.*
celui d- ...ute des minéraux
On ... considérés comme
... unures, liées entre

par l'affinité. Ces molécules, ainsi que nous le verrons plus bas, ont des formes également remarquables par leur régularité et par leur simplicité. Or, lorsque celles qui appartiennent à un minéral sont suspendues dans un liquide, et qu'ensuite ce liquide, soit en s'évaporant, soit par quelque autre cause, les abandonne à leur affinité réciproque, et de plus lorsqu'aucune force perturbatrice ne gêne cette affinité, les molécules en s'unissant les unes aux autres par les faces les plus disposées à cette réunion, composent, par leur assemblage, des corps réguliers terminés par des faces planes, et analogues aux solides de la Géométrie. Ce sont ces corps que l'on a nommés en général *cristaux*, quelle que soit la substance qui en ait fourni les matériaux.

5. Ici se présente une nouvelle différence bien remarquable entre les minéraux et les êtres organiques. Si l'on parcourt ces parterres où se trouvent rangées dans un ordre si bien assorti aux rapports naturels, les richesses végétales de tous les pays du monde, on y voit que tous les individus d'une même espèce se ressemblent par leur forme, en sorte que toutes les fleurs ont leurs étamines et leurs styles en même nombre, et disposés de la même manière. On peut en dire autant des pétales, des folioles du calice; et la ressemblance s'étend jusqu'à la forme des tiges et à la disposition générale des feuilles; les différences, s'il en existe, ne tiennent qu'à des nuances de port, de grandeur, de couleur, en sorte que l'on

peut dire que celui qui a vu un seul individu, a vu l'espèce entière. Dans le règne minéral au contraire, les cristaux qui appartiennent à une même espèce présentent souvent des formes qui sans cesser d'être régulières, diffèrent plus ou moins sensiblement les unes des autres, soit par le nombre, soit par les positions respectives de leurs faces. J'en citerai, dans la suite de nombreux exemples, et nous verrons même que parmi les formes dont il s'agit, il en est qui n'offrent aucun trait de ressemblance, et paraissent être entièrement étrangères les unes à l'égard des autres.

Ces contrastes sont d'autant plus propres à exciter la surprise, que les formes qui les présentent portent l'empreinte d'un travail géométrique, et ont ce caractère de régularité qui semble emporter avec lui l'idée de constance et d'uniformité. Le but principal de cet Ouvrage est d'éclaircir le paradoxe qui naît de ces contrastes, et de montrer qu'au milieu de tous ces résultats dont chacun semble donner au travail de la nature un air de nouveauté sous lequel on serait tenté de ne la plus reconnaître, elle ne cesse point d'être semblable à elle-même.

Division des formes cristallines considérées en général.

6. Le point de vue auquel je me suis proposé de ramener l'étude des corps réguliers que produit la cristallisation, m'a paru exiger que la définition et la no-

menclature de ces corps fussent fixées d'une manière assortie à la solution des problèmes, dont ils offrent les sujets.

7. Les figures des faces qui composent la surface des cristaux, conserveront les dénominations de *triangle*, de *carré*, de *rhombe*, de *trapèze*, etc., qu'elles portent dans la Géométrie ordinaire, ainsi que celles de *triangle équilatéral*, *isocèle*, *scalène*, etc., de *parallélogramme rectangle*, *obliquangle*, etc., que l'on a données à leurs diverses modifications.

Une face est dite, en général, être *verticale*, *horizontale* ou *oblique*, suivant que sa direction déterminée par la position naturelle du cristal, est celle qu'indique l'une ou l'autre des dénominations qui viennent d'être énoncées.

Les lignes qui terminent les faces d'un cristal portent le nom de *bords* ou de *côtés*. On donne plus particulièrement le nom d'*arêtes* aux mêmes lignes, lorsqu'on les considère comme situées à la rencontre de deux faces. On dit d'une arête qu'elle est *verticale*, *horizontale* ou *oblique*, en prenant ces mots dans le même sens que pour les faces.

8. On distingue dans les cristaux trois sortes d'angles : les *angles plans*, ou ceux qui sont formés par deux bords adjacens sur une même face; les *angles saillans*, ou ceux que font entre elles les faces qui se réunissent deux à deux sur une même arête; et les *angles solides*, ou ceux qui résultent du concours de plus de deux angles plans. Un angle solide est trièdre,

tétraèdre, pentaèdre, etc., suivant qu'il est composé de trois angles plans, de quatre, de cinq, etc.

Les angles plans ou saillans sont égaux, lorsqu'ils ont pour mesure le même nombre de degrés. J'appelle *bords identiques* ceux qui, étant égaux entre eux, servent de ligne de jonction à des faces qui font entre elles des angles saillans pareillement égaux.

Les angles solides sont égaux, lorsque les angles plans qui les composent ont comparativement des mesures égales, et sont également inclinés entre eux.

9. J'appelle *axe* en général une ligne droite menée par le centre d'un cristal, et dont telle est la direction, que toutes les parties du cristal sont disposées symétriquement à son égard. Un des principaux caractères de cette symétrie dépend de ce que les lignes menées perpendiculairement sur l'axe, en partant des angles solides égaux et situés sur les parties environnantes, sont égales entre elles. Un même corps est souvent susceptible d'être traversé par plusieurs lignes dont chacune peut être prise pour axe. Mais il y a, dans ce cas, un axe principal, que je nomme *axe de cristallisation*, et qui se distingue des autres, en ce qu'il est dirigé verticalement, lorsque le cristal est dans sa position naturelle. Cette position est presque toujours indiquée par l'aspect de la forme considérée en elle-même; mais les indices qui la font surtout reconnaître sont ceux qui se tirent du rapprochement des différentes formes cristallines, toutes d'une même espèce, avec l'une d'entre

elles, qui sert comme de mesure commune pour les comparer.

Ce que je vais dire des solides que considère la Géométrie des cristaux se bornera à la notion des formes qui présentent ce dernier caractère, et de celles qui sont comme les élémens dans lesquels elles se résolvent, lorsqu'on les sous-divise à l'aide d'une opération dont je parlerai dans la suite.

10. La plus simple est le *tétraèdre*, que l'on appelle communément *pyramide triangulaire*. Il est *régulier*, lorsque toutes ses faces sont des triangles équilatéraux; tel est celui que représente la fig. 1, pl. I. Il est *symétrique*, lorsque ses faces sont des triangles isocèles, égaux et semblables, *bca*, *bda*, *dac*, *dbc* (fig. 2); *hémi-symétrique*, lorsqu'étant toujours des triangles isocèles, elles ne sont égales et semblables que deux à deux, comme *bda*, *bca* (fig. 3) d'une part; et *dac*, *dbc* de l'autre; *irrégulier*, lorsqu'elles diffèrent toutes les unes des autres, ou qu'il n'y en a que deux qui soient égales et semblables. Cette préférence, donnée au mot de *tétraèdre*, est fondée sur ce que la fonction que fait le plus ordinairement ce solide, dans les produits de la cristallisation, s'accorde peu avec l'idée que l'on attache au nom de *pyramide*, et qui est celle d'un solide à quatre faces dont une que l'on considère comme la base est située horizontalement. Tel est au contraire l'aspect que présentent les cristaux dans lesquels le tétraèdre entre comme élément, qu'il détermine, rela-

[redacted] une position sous laquelle [redacted] censée faire l'office de [redacted] figures et l'assortiment [redacted] suffisent à écarter encore [redacted] pyramide. Ainsi le tétraèdre régulier [redacted] situé de manière que deux [redacted] *ab*, *cd*, qui ont leurs directions [redacted] entre elles, étant parallèles à [redacted] toutes ces arêtes sont les lignes de [redacted] obliques. Quelquefois ce[redacted] solide régulier s'offre d'une manière [redacted] aucune relation de position avec celle [redacted] une base; mais quoiqu'il paraisse rentrer [redacted] la classe des pyramides, il conviendrait [redacted] de lui en donner le nom, que toutes [redacted] étant dans le même cas il n'y a aucune raison [redacted] considérer comme base l'une plutôt que l'autre.

Ce que j'ai dit d'abord du tétraèdre régulier s'applique à celui que je nomme *symétrique*. La fig. 2 représente un de ces tétraèdres qui appartient au spath. Les lignes *ab*, *cd* des triangles isocèles *acb*, *adb*, *cbd*, *cad*, qui composent sa surface, font aussi entre elles des angles droits, et sont de même situées horizontalement. Mais dans le tétraèdre symétrique que l'on voit fig 3. et qui est celui du grenat, les lignes *cd*, *ab* des triangles isocèles pris deux à deux, étant toujours perpendiculaires entre elles, sont inclinées à l'horizon, et l'une des deux autres arêtes, savoir, *ad*, est située verticalement, parce qu'elle se

confond avec l'axe du cristal dont ce tétraèdre fait partie.

Dans le tétraèdre hémi-symétrique de la fig. 3, et qui est celui de la topaze, les bases *cd*, *ab* des triangles isocèles ont les mêmes relations, soit entre elles, soit par rapport à l'horizon, et chacune d'elles est commune à deux triangles égaux et semblables, qui ont aussi des positions obliques.

L'axe géométrique d'une pyramide est une ligne abaissée d'un des angles solides sur le milieu de la face opposée que l'on considère comme base, et que l'on suppose située horizontalement. Il suit de là que cet axe n'est censé exister dans aucun des tétraèdres représentés par les figures 1, 2, 3 et 4. Mais tous, à l'exception de celui du grenat que l'on voit fig. 4, ont pour axe de cristallisation la ligne qui passe par les milieux des arêtes *ab*, *cd*; cette ligne étant dirigée verticalement, à cause de la position horizontale des arêtes dont il s'agit. A l'égard du tétraèdre du grenat (fig. 4), son axe de cristallisation est en quelque sorte suppléé par celui du cristal auquel appartient ce tétraèdre, et qui coïncide, comme je l'ai dit, avec l'arête verticale *ad*.

Lorsque le tétraèdre régulier existe isolément, on peut choisir à volonté pour sa base l'une quelconque de ses faces, en donnant à celle-ci une position horizontale, et la ligne verticale menée par le centre de cette base sera en même temps l'axe géométrique et celui de cristallisation.

11. Parmi les parallélépipèdes, le *cube* conserve sa dénomination. Il se trouve dans sa position naturelle, lorsque deux de ses faces opposées prises à volonté pour bases sont horizontales. Cette position détermine celle des deux axes, l'un géométrique, l'autre dit *de cristallisation*, qui se confondent en une seule ligne menée par les centres des bases.

12. Le parallélépipède dont les six faces sont des rhombes égaux et semblables *abdf*, *agqf*, etc. (fig. 5), s'appelle *rhomboïde*. Parmi les huit angles solides opposés sur ce parallélépipède, il y en a toujours deux tels que *a*, *s*, qui sont semblables et égaux, tandis que chacun des six autres est composé de deux angles égaux entre eux, et d'un troisième qui est le supplément de l'un ou l'autre des deux premiers. La ligne *as* qui passe par les deux angles semblables et égaux, est l'axe géométrique et à la fois l'axe de cristallisation du rhomboïde. Cet axe étant toujours dirigé verticalement, les points *a*, *s* qui le terminent, prennent les noms de *sommets*. Le rhomboïde est obtus ou aigu, suivant que les angles plans situés aux sommets sont eux-mêmes obtus ou aigus.

Les choses étant dans cet état, l'angle plan contigu au sommet supérieur *a*, sur l'un quelconque *bafd* des rhombes adjacens, s'appelle *angle supérieur* de ce rhombe. L'angle *d*, opposé au précédent, porte le nom d'*angle inférieur*, et les deux autres *b*, *f* s'appellent *angles latéraux*. Si l'on veut désigner les angles solides dont ces derniers font partie, on

emploie la dénomination d'*angles solides latéraux*.

On nomme *bords supérieurs* ceux qui sont de même contigus au sommet *a*, et *bords inférieurs* ceux qui sont opposés aux deux précédens. La diagonale *ad* du même rhombe, qui aboutit au sommet, est la *diagonale oblique*, et l'autre *bf* est la *diagonale horizontale*, les positions de ces lignes étant nécessairement celles qu'indiquent ces noms, quels que soient les angles du rhomboïde. Nous verrons dans la suite qu'il suffit, pour l'application de la théorie, de considérer un seul des rhombes adjacens au sommet supérieur.

On nomme *coupe principale* d'un rhomboïde, celle qui passe par deux des arêtes, telles que *af*, *sx* (fig. 6) contiguës à l'axe, et opposées entre elles, et par les diagonales obliques *fs*, *ax* comprises entre ces arêtes. La coupe transversale *lnrz* est celle qui est prise par un plan perpendiculaire aux arêtes parallèles *af*, *bd*, *xs*, *gq*. Les angles de cette coupe mesurent les incidences des faces l'une sur l'autre, et ce sont les valeurs particulières de ces incidences qui caractérisent le rhomboïde que l'on considère, et servent à le distinguer des autres solides de la même espèce.

13. Le nom de *prisme*, sans aucune désignation particulière du nombre des *faces latérales*, ou des *pans*, s'applique en général aux parallélépipèdes qui diffèrent de ceux que je viens d'indiquer.

Le *prisme quadrangulaire symétrique* est celui dont la coupe prise par un plan perpendiculaire aux

11. Parmi les [illegible] que j'appel-
dénomination. [illegible] Le *prisme*
lorsque deux [illegible] coupe trans-
pour ba es so[illegible] un rhombe,
mine celle de[illegible] qu'elle est un
dit *de cristal*[illegible] sme prend le
seule ligne n[illegible]

12. [illegible] de considérer
rhombes égaux[illegible] que la position de
s'appelle *rhom*[illegible] *droit*, si cette base
posés sur c[illegible] fig. 7 représente
tels que *a*. [illegible] appartient à la
que chacun [illegible] rectangulaire,
gles égaux [illegible] fig. 9, un prisme
supplémen[illegible] parmi les cristaux de
ligne *as* [illegible] prisme droit qua-
égaux, [illegible] tient à l'épidote (1).
tallisation [illegible] al, lorsque sa base
rigé ver[illegible] du moins sur quel-
prenne[illegible] représente un pris-
obtus[illegible] se rapporte au fer
somm[illegible] oblique rhomboïdal,

Le[illegible] la fig. 13, un prisme
cont[illegible] ier, qui se rapporte
basil
rieu

port[illegible], d'une manière précise,
f s'a[illegible], et le rapport de leurs di-
les.

Lorsque toutes les faces du prisme sont des parallélogrammes obliquangles, je lui conserve le nom de *parallélépipède obliquangle*, que lui ont donné les géomètres. La figure 14 représente un prisme de ce genre, qui se rencontre parmi les cristaux de feldspath.

14. A ne considérer les divers prismes qui viennent d'être décrits, que sous le rapport de la Géométrie, on peut concevoir dans chacun d'eux trois axes différens qui passeront par les centres des faces opposées deux à deux, et si l'on place les prismes de manière que ces axes prennent successivement des positions verticales, on remarque que le changement d'aspect qui en résulte, transforme ordinairement chaque prisme en un autre désigné sous un nom différent. Par exemple si l'on suppose que dans le prisme symétrique de la méïonite (fig. 7), ce soient les faces ADFL, BCGI qui fassent la fonction de bases, ce prisme prendra le caractère de celui que j'appelle *rectangulaire*. Dans la même hypothèse, le prisme droit rhomboïdal (fig. 9) de la baryte sulfatée se convertit en prisme rectangulaire oblique, et ainsi des autres. Mais chaque prisme se trouve ramené par la considération de l'axe de cristallisation à une position fixe, qui est celle que représente la figure. Ainsi la position naturelle du prisme droit symétrique (fig. 7), est celle qui a lieu, lorsque les faces ABCD, LIGF, font la fonction de bases, parce qu'alors celles que l'on considère comme les pans sont toutes égales et sembla-

ac
pa
no
ro
sa
es
n
:

plus bas. La position naturelle de ces deux espèces de prismes est trop évidente, pour qu'il soit nécessaire de l'indiquer.

15. Les octaèdres offerts par la cristallisation se rapportent en général aux cinq modifications suivantes. Dans la première, les trois quadrilatères NROL, POSN, PLSR (fig 15) que l'on peut considérer comme les bases communes des pyramides dont les sommets se confondent avec ceux des angles solides opposés de l'octaèdre, sont des carrés égaux entre eux. C'est alors l'*octaèdre régulier*, dont plusieurs espèces, telles que l'alumine sulfatée, le spinelle, le fer oxydulé, etc., offrent des exemples. Dans la seconde modification, un seul des quadrilatères, que nous supposerons être NROL (fig. 16) est un carré; les deux autres sont des rhombes égaux et semblables; il en résulte que les huit faces de l'octaèdre sont des triangles isocèles, aussi égaux et semblables, dont les bases se confondent avec les côtés du quadrilatère NROL. Je donne à cette modification le nom d'*octaèdre symétrique*. La fig. 16 représente celui du zircon, dans lequel l'incidence mutuelle de deux faces adjacentes sur les pyramides qui ont pour base commune le carré NROL est d'environ 83°. Dans la troisième modification (fig. 17), les trois quadrilatères sont des rhombes, dont chacun diffère des deux autres. Alors toutes les faces de l'octaèdre sont des triangles scalènes égaux et semblables : c'est ce que j'appelle *octaèdre rhomboïdal*. Tel est celui que presentent

e soire, et dans lequel les an-
ont de 102d 42′, et 77d 18′,
de deux faces, telles que
ans les deux pyramides qui
pour base commune, est de

métrique, soit rhomboïdal, est
que deux de ses faces, telles que
prises de deux côtés opposés,
sommet, font entre elles un angle
est l'octaèdre symétrique de la
et l'octaèdre rhomboïdal de la
angle du sommet étant de 97d dans
d dans le second.

modification est relative à un oc-
uel le quadrilatère NROL (fig. 18) est
les deux autres sont des rhombes
entre eux. Alors les faces de l'oc-
angles isocèles, mais égaux et sem-
quatre à quatre. Cette modification
rectangulaire. Dans la fig. 18,
l'octaèdre de la topaze, le côté OL
que le côté OR ; l'incidence de OSR sur
$\frac{2}{3}$ à peu près, et celle de OSL sur

ectangulaire est *obtus*, lorsque ses
eux à deux de part et d'autre d'un
comme OSR et LSN, ou OSL et RSN,
des angles obtus. Il est *aigu*, lorsque

les angles dont il s'agit sont eux-mêmes aigus. Il est *semi-obtus*, lorsqu'un des angles est obtus et l'autre aigu, auquel cas les triangles qui font entre eux l'angle obtus sont toujours les plus petits, comme OSL, RSN dans le cas présent.

Dans la cinquième modification, le quadrilatère NROL (fig. 19) est un parallélogramme obliquangle, et les deux autres sont encore des rhombes égaux et semblables. Les faces de l'octaèdre sont des triangles scalènes, égaux et semblables, seulement quatre à quatre. Cette modification porte le nom d'*octaèdre irrégulier*. J'ai observé tout récemment cette forme parmi les variétés du cuivre carbonaté.

16. Il existe entre les octaèdres qui viennent d'être décrits et les divers prismes qui l'ont été précédemment, une relation que je ne ferai ici qu'énoncer, et qui reparaîtra dans le développement de la théorie. J'omets ici l'octaèdre régulier dont l'analogie avec le cube a un caractère particulier que je ferai connaître dans la suite. A l'égard des autres octaèdres, la relation dont j'ai parlé consiste en ce que parmi les prismes qui font l'office de forme fondamentale, il y en a toujours un que l'on peut ramener à l'un des octaèdres, en donnant à ce prisme des bases égales et semblables à la base commune des deux pyramides qui composent l'octaèdre, et en lui donnant un axe égal à la somme des axes des mêmes pyramides. Ainsi, l'analogue de l'octaèdre symétrique est le prisme droit quadrangulaire symetrique; celui de

souvent les cristaux [illegible] droit rhomboïdal; gles du rhombe N[illegible] le prisme droit et l'incidence n[illegible] irrégulier est le LSO, PLO, adj[illegible]. ont le même [illegible]qui passent par les 143d. [illegible]st. Parmi ces trois

L'octaèdre [illegible]ans un plan hori- obtus ou aig[illegible]ales des bases du RSO, LSN (f[illegible] confond avec l'axe vers un mi[illegible]e et doit être aussi obtus ou [illegible]. relativement à l'oc- fig. 16 est [illegible]quefois que l'octaèdre fig. 17 est [illegible]u sous laquelle l'axe le premier [illegible] quadrilatère, dont la fi-

La qu[illegible]e être dirigé horizontale- taèdre d[illegible]e représente la figure 20, un rec[illegible]e nitratée. Dans cet oc- égaux [illegible]ve des faces LPO, LSO, taèdr[illegible]. et celle des faces OPR, blabl[illegible]120°. Alors, l'axe de cris- se re[illegible]H, menée par les milieux qu[illegible]L MR.

est [illegible] dont il s'agit ici, comme Ol[illegible]. et fondé sur ce que dans Ol[illegible] cette espèce d'octaèdre, [illegible] comme les pans d'un tr[illegible] faces inclinées à ces re[illegible]t, dans certains cristaux, fo[illegible] qui reposent sur les bases

du prisme. Or, l'axe du prisme et celui des pyramides ne peuvent avoir la direction verticale indiquée par la forme de ces deux espèces de solides, qu'autant que la ligne GH à laquelle cet axe est parallèle prend la même direction.

18. Parmi les différens dodécaèdres que produit la cristallisation, il y en a deux dont les formes rentrent parmi celles qui sont l'objet de cet article. L'un est le dodécaèdre *rhomboïdal* EI (fig. 21) dont toutes les faces sont des rhombes égaux et semblables. Cette forme appartient au grenat et au zinc sulfuré. Elle n'est pas susceptible de plus ou de moins dans les inclinaisons mutuelles de ses faces adjacentes, qui sont toutes de 120°, par une suite nécessaire de l'égalité et de la similitude des mêmes faces, comme il sera prouvé dans la suite. Le dodécaèdre rhomboïdal a six angles solides tétraèdres semblables et égaux, opposés deux à deux, savoir B, D, E, M, G, I, et huit angles trièdres, qui sont de même égaux et semblables, savoir A, F, H, C, L, R, S, N, d'où il suit que ce dodécaèdre a sept axes, dont trois passent par les premiers angles, et les quatre autres par les derniers.

La position naturelle du même dodécaèdre est celle sous laquelle un des axes qui passent par deux angles solides trièdres opposés, choisis à volonté, comme A, L, est dirigé verticalement. C'est une suite de ce que les trois faces AEFB, AESD, ABCD, ou LGHI, LMRI, LMNG s'assimilent, dans les ré-

[illegible] chimie, à celles qui se réunissent autour [illegible] supérieur ou inférieur d'un rhomboïde, et [illegible] cristallisation du dodécaèdre doit coïn- [illegible] qui passe par les points A, L, qui [illegible] être les sommets communs aux deux [illegible].

[illegible] dodécaèdre que je nomme *bi-pyramidal*, [illegible] les triangles isocèles égaux et sembla- [illegible] composent les surfaces de deux pyramides [illegible] réunies base à base. Celui que l'on [illegible] appartient au quarz. Il est évident que [illegible] cristallisation ne doit pas différer de son [illegible], qui se confond lui-même avec les [illegible] pyramides dont le dodécaèdre est l'assem- [illegible].

Les divers solides que je viens de décrire varient [illegible] espèce à l'autre, ainsi que nous le verrons [illegible] par le rapport de leurs dimensions, ou [illegible] au même, par les incidences mutuelles [illegible].

Pour déterminer ces dernières, et en général toutes celles qui ont lieu sur les formes cristallines relatives aux différentes espèces minérales, on se sert d'un instrument appelé *goniomètre*, dont l'invention est due à M. Carangeau. Cet instrument est composé d'un demi-cercle MTN (fig. 23), de laiton ou d'argent, divisé en degrés, et qui porte deux alidades AB, FG, dont l'une FG est évidée depuis *u* jusqu'en K en coulisse à jour, excepté à l'endroit K, où l'on

a laissé une petite traverse, qui n'est qu'un accessoire fait pour donner plus de solidité à l'instrument. Cette alidade est attachée en R et en c sur une règle de laiton située derrière, et qui fait corps avec le demi-cercle. La réunion de l'alidade avec cette règle s'opère au moyen de deux petites tiges à vis, qui s'insèrent dans la coulisse, et dont chacune porte un écrou. L'autre alidade est pareillement évidée, depuis *x* jusqu'en *c*, où elle est attachée au-dessus de la première, à l'aide de la tige à vis qui est en cet endroit, et qui traverse les deux rainures. En lâchant les écrous, on peut raccourcir à volonté les parties *c*G, *c*B des deux alidades, suivant que les circonstances l'exigent.

L'alidade AB n'ayant qu'un seul point d'attache en *c*, où est le centre du cercle, a un mouvement autour de ce centre, tandis que l'alidade GF reste constamment dans la direction du diamètre qui passe par les points 0° et 180°.

Il n'est pas inutile de remarquer que la partie supérieure de l'alidade AB doit être amincie, en forme de tranchant, vers son bord *s z*, dont la direction prolongée en dessous passe par le centre *c* de l'instrument. La raison en est que ce bord est ce que l'on appelle *la ligne de foi*, c'est-à-dire celle qui indique sur la circonférence graduée la mesure de l'angle cherché (1).

---

(1) Les personnes qui désireraient se procurer des gonyo-

Supposons maintenant que l'on veuille mesurer sur un cristal l'angle que forment entre eux deux plans voisins. On sait que cet angle est égal à celui de deux lignes menées d'un même point de l'arête qui réunit ces plans, avec la condition qu'elles soient perpendiculaires à cette arête et couchées sur les mêmes plans. Pour avoir cet angle, on disposera l'instrument de manière que les portions *c* G, *c* B des deux alidades ne laissent aucun jour entre elles et les plans dont il s'agit, et qu'en même temps leurs bords soient perpendiculaires à l'arête de jonction. Dans ce cas, les faces qui embrassent le cristal sont tangentes aux deux plans dont on veut avoir l'incidence.

Cela fait, on cherchera sur la circonférence de l'instrument le degré que marque la ligne de foi *sz*, ou l'angle que fait cette ligne avec celle qui passe par le centre *c* et par le point o°, lequel angle est égal à celui que forment les deux portions G*c*, *c*B des alidades, puisqu'il lui est opposé au sommet.

C'est un avantage de pouvoir raccourcir à son gré ces mêmes parties, pour éviter les obstacles qui rendraient l'opération impraticable, et qui peuvent provenir soit de la gangue à laquelle adhère le cristal, soit des

---

mètres, peuvent s'adresser avec une entière confiance à MM. Richer, artistes très avantageusement connus. Ceux qu'ils exécutent ne laissent rien à désirer, soit pour la précision des mesures, soit pour le fini du travail. MM. Richer demeurent rue du Harlai, n° 6, ou boulevard Saint-Antoine, n° 71.

cristaux voisins dans lesquels il est engagé en partie; mais il est des cas où cette précaution ne suffit pas, et où l'on se trouverait gêné par la partie du demi-cercle située vers M, si sa position était invariable. L'ingénieux auteur de l'instrument a paré à cet inconvénient à l'aide du mécanisme suivant.

La tige située en *c* porte, outre les deux alidades, une tringle d'acier placée en dessous de la règle de cuivre sur laquelle est appliquée immédiatement l'alidade GF. L'extrémité supérieure de cette tringle, ou celle qui est située vers O, a une échancrure dans laquelle entre une tige d'acier garnie pareillement d'un écrou. De plus le demi-cercle est brisé à l'endroit du 90^{e} degré, en sorte qu'au moyen d'une charnière dont il est garni au même endroit, le quart de cercle TM se replie en dessous du quart de cercle TN, et se trouve comme supprimé. Lorsque l'on veut exécuter ce mouvement, on lâche l'écrou qui maintenait la partie supérieure de la tringle *c* O, on dégage l'échancrure qui termine cette tringle de l'écrou qui s'y insérait, et l'on rabat la tringle jusque par dessous la règle de cuivre qui porte l'alidade GF. Lorsque l'angle mesuré excède 90^{d}, on remet le quart de cercle TM à sa place, pour en reconnaître la valeur.

Des variations des formes cristallines.

20. Parmi les cristaux originaires d'une même substance, trouvés dans différens pays, il en existe qui

sont semblables par le nombre de leurs faces, par la disposition respective de celles-ci, et, ce qui est très remarquable, par les angles qu'elles font les unes avec les autres. Les diversités, lorsqu'elles ont lieu, ne tiennent qu'à des causes accidentelles, qui ont changé le rapport des dimensions, par une suite de ce que certaines faces sont plus voisines ou plus éloignées du centre dans tel cristal que dans tel autre. Cet article en offrira plusieurs exemples; mais il n'en résulte qu'une différence d'aspect, et les inclinaisons mutuelles des faces subsistent sans aucune altération.

Souvent aussi, comme je l'ai déjà annoncé, la cristallisation, en agissant sur des molécules identiques, donne naissance à des polyèdres réellement distingués les uns des autres. Ainsi le fer sulfuré se présente sous la forme d'un cube, d'un octaèdre régulier, d'un dodécaèdre à faces pentagonales et d'un solide dont la surface est composée de 24 faces trapézoïdales égales et semblables. Dans l'espèce de la chaux carbonatée, outre plusieurs rhomboïdes différens par la mesure de leurs angles, on observe un dodécaèdre à faces triangulaires scalènes (fig. 24) et d'autres formes qui, au premier aspect, paraissent étrangères soit entre elles, soit à l'égard des précédentes.

21. Dans toutes les formes qui viennent d'être indiquées, les faces sont égales et semblables entre elles; mais il est plus ordinaire de trouver des cristaux dont la surface est composée de deux, de trois ou d'un

plus grand nombre d'ordres de facettes distinctes, de manière que si l'on prend celles de chaque ordre, et si on les suppose prolongées jusqu'à ce qu'elles se rencontrent, en masquant toutes les autres, on a un solide qui existe ou qui peut exister solitairement dans la même espèce.

Ainsi la combinaison des faces du cube avec celles de l'octaèdre régulier donne le solide à 14 faces représenté fig. 25. Dans la chaux carbonatée, la forme du prisme hexaèdre régulier qui est une des variétés de cette substance, en se combinant avec celles d'un rhomboïde très obtus, produit un solide à 14 faces (fig. 26), dont six verticales c, c, deux horizontales o, o, et six obliques g, g, disposées trois à trois vers chaque sommet. La forme du dodécaèdre à triangles scalènes (fig. 24), en se combinant avec un autre rhomboïde, produit un polyèdre à 18 faces représenté (fig. 27). Il existe aussi des combinaisons ternaires, quaternaires, etc., analogues aux précédentes. J'ai un cristal de fer sulfuré que je ferai connaître dans la suite, et qui a 134 facettes, ce qui est, dans ce genre, le *maximum* offert jusqu'ici par l'observation. Ces facettes se soudivisent en huit ordres différens, relatifs à autant de formes particulières.

22. J'ajouterai ici quelques observations sur les variations de forme purement accidentelles dont j'ai parlé précédemment. Il ne s'agit point de celles qui troublent entièrement la symétrie, en détruisant l'égalité des faces qui se correspondent, de manière que

les unes prennent une étendue considérable, tandis que les autres contrastent avec elles par leur petitesse, et quelquefois échappent presque à l'œil. La considération de ces anomalies est étrangère à la Géométrie des cristaux, et doit plutôt fixer l'attention du minéralogiste, qui est intéressé, comme observateur de la nature, à savoir démêler le type de la forme, à travers tous les jeux de position qui la déguisent. Je supposerai donc que les diversités occasionnées par les accidens que j'ai annoncés, influent également sur toutes les faces d'un même ordre, et je ferai voir qu'elles peuvent être ramenées à une limite dont elles s'écartent plus ou moins à mesure qu'elles se rapprochent des extrêmes, et réciproquement. Je me bornerai à un petit nombre d'exemples.

23. J'ai cité plus haut une forme représentée (fig. 27), et qui résulte de la combinaison des faces *g* du cube, avec les faces *d* de l'octaèdre régulier. Dans cette figure les faces *g*, qui sont des octogones, prédominent sur les faces triangulaires *d*, et si l'on conçoit que ces dernières s'écartent du centre, de plus en plus on aura une gradation dont le terme, qui sera le cube complet, aura lieu lorsque les faces *d* deviendront nulles.

Supposons au contraire que les faces *d* se rapprochent du centre, il y aura un autre terme où elles toucheront les faces *g* (fig. 28.) en restant toujours triangulaires, tandis que les faces *g* seront des carrés. Si le mouvement des faces *d* vers le centre continue

au-delà de ce terme, il est facile de voir qu'elles s'entrecouperont de manière à devenir des hexagones, tandis que les faces *g* conserveront la figure carrée, et n'auront fait que diminuer d'étendue. Alors le solide tendra de plus en plus vers la forme de l'octaèdre régulier, qu'il finira par présenter sans aucune modification, à un troisième terme où les faces *g* auront disparu. Or la limite à laquelle il convient de rapporter toutes les variations précédentes, est celle que représente la fig. 28, qui correspond à un terme fixe, où le solide participe également du cube et de l'octaèdre, et où ses faces considérées dans leur ensemble ont le plus grand degré de simplicité possible. Cette limite existe surtout parmi les cristaux de plomb sulfuré.

24. Il existe une variété de chaux carbonatée que l'on voit (fig. 29), et qui a sa surface composée de douze pentagones, dont six, savoir c, c, c', sont situés comme les pans d'un prisme hexaèdre régulier, et les six autres g, g, g', etc. qui se réunissent trois à trois en sommets pyramidaux appartiennent au rhomboïde obtus, cité plus haut.

Si l'on conçoit que les deux sommets s'éloignent et s'approchent successivement l'un de l'autre, de manière que les faces de chacun restent parallèles à elles-mêmes, les faces verticales c, c', dans le premier cas auront une extension illimitée; mais dans le second, il y aura un terme où leurs côtés mn, rs, etc. après avoir été toujours en diminuant, s'éva-

les unes prennent une étendue con- [illegible] 30). Au-
que les autres contrastent avec elles [illegible] de s'ap
et quelquefois échappent presque [illegible] ndue, et
ration de ces anomalies est étrau [illegible] s s'entrec
des cristaux, et doit plutôt fix [illegible] utes des hep
néralogiste, qui est intéressé, [illegible] angles auro
la nature, à savoir démêler l [illegible] du rhomboid
travers tous les jeux de posit [illegible] toutes ces vari
supposerai donc que les di [illegible] et dans laquel
les accidens que j'ai anno [illegible] ple possible re
sur toutes les faces d'un [illegible] triangles *c*, *c*
qu'elles peuvent être ram [illegible] extrêmes don
s'écartent plus ou moins [illegible]
chent des extrêmes, et [illegible] polyèdre n'indique
nerai à un petit nombr [illegible] variations. C'est ce

23. J'ai cité plus [illegible] ce polyèdre est un
(fig. 25) et qui résulte [illegible] ramides, comme on le
cube, avec les faces [illegible] point d'intermédiaire
figure les faces *g*, [illegible] ouvemens en sens con-
nent sur les faces [illegible] dont l'un tend à faire
que ces dernière- [illegible] térales, dans le sens
plus on aura un [illegible] l faut à les diminuer
le cube complet [illegible] nulles à zéro. Mais nous
dront nulles. [illegible] de ces, la théorie sert à

Supposons a [illegible] prisme, la hauteur qui
chent du centr [illegible] qui tend la cristallisation
toucheront le [illegible] ent par accident. Je revien-
triangulaires, [illegible] de détail, sur les varia-
Si le mouvem [illegible]

autres formes fût démontrée avec une précision rigoureuse.

Mon but, dans cet article, sera d'exposer les résultats des observations qui me paraissent remplir la première condition. Je ferai connaître, dans les articles suivans ceux des recherches que j'ai entreprises dans la vue de satisfaire à la seconde.

J'ai d'autant plus lieu d'espérer qu'on me permettra de raconter ici la manière dont j'ai été conduit à l'observation qui m'a donné, pour ainsi dire, la clef de la théorie, qu'elle n'a point été cherchée, et s'est présentée comme d'elle-même, en sorte qu'il suffisait de ne pas fermer les yeux sur le fait fondamental qui en était le sujet, et qui devait à son tour amener tout le reste.

26. Ce fait s'est montré sur un cristal prismatique de chaux carbonatée, dont M. Defrance, amateur très éclairé, avait eu la bonté de me faire présent, au moment où il venait de se détacher d'un groupe qui faisait partie de sa riche collection.

En examinant ce cristal, lorsque je fus de retour, je m'aperçus que la fracture qui s'y était faite à l'endroit par lequel il tenait au groupe, avait emporté une des arêtes du contour de la base, et j'observai, au même endroit, une face *stoo* (fig. 33) qu'il était facile de reconnaître, à la netteté de son poli et à la vivacité de son éclat, pour un des joints naturels situés entre les lames dont le prisme était l'assemblage.

La figure de cette face, qui était un trapèze, et la

direction de sa base *st*, qui était tournée vers l'arête opposée *bc*, indiquait que pour la faire naître, à l'aide de la division mécanique, il aurait fallu diriger le plan coupant parallèlement à l'arête *lf*; et en estimant la position de ce plan d'après celle de la face déjà observée, j'avais jugé qu'il devait être incliné sensiblement de la même quantité, tant sur la base du prisme, que sur la face latérale adjacente *lff'l'* (1). Supposant donc la chose faite, comme je viens de le dire, j'essayai d'intercepter les autres arêtes par de nouvelles divisions analogues à la première, et je trouvai qu'il n'y en avait que trois parmi les six du contour de chaque base, qui se prêtassent à cette opération. Ces arêtes étaient d'une part, *lf*, *mb*, *cd* (fig. 34), et d'une autre part *b'c'*, *f'd'*, *m'l'*; d'où l'on voit que, connaissant une des arêtes susceptibles d'être interceptées par des plans diviseurs, il fallait pour continuer l'opération, prendre les autres arêtes de deux en deux, autour de la même base, et de plus choisir autour de la base opposée les trois arêtes qui alternaient avec les précédentes; il en résultait que les trois trapèzes *stoo*, *xnkk*, *vuhh*, mis à découvert autour de la base supérieure, et les trois autres *iiv'u'*, *x'n'ee*, *s't'gg* qui se montraient autour de la base inférieure, étaient parallèles chacun à chacun.

(1) Je reviendrai dans la suite sur cette égalité d'inclinaison, qui conduit à des résultats intéressans sous le rapport de la théorie.

autres formes fût démontrée avec m
goureuse. au prisme,

Mon but, dans cet article, sera , dont les
sultats des observations qui ne p le plus en
première condition. Je ferai co me où elles
ticles suivans ceux des recher ncidaient
dans la vue de satisfaire à la s nt elles for-

J'ai d'autant plus lieu d'e me fut changé
tra de raconter ici la manièr gonales, dont
l'observation qui m'a donn étaient le ré-
de la théorie, qu'elle n'a p s autres *ooiOe*,
présentée comme d'elle nie.
sait de ne pas fermer le gones extrêmes
qui en était le sujet, et mensions, tandis
tout le reste. ment continuelle-

26. Ce fait s'est m les points *o* et *e*,
de chaux carbonatée ndre, ces derniers
éclairé, avait eu la f simples triangles,
ment où il venait
faisait partie de s ayant fait disparaître

En examinant estiges de la surface
je m'aperçus q entre les mains, et
droit par lequel prisme, fut un rhom-
une des arêtes es faces prises vers un
au même end entre elles d'envi-
facile de rec le grand angle EAI,
vivacité de pour mesure, à peu
situés entre

La figure urellement me suggérer
, était qu'il n'offrait

particulier d'une propriété commune à ... variétés de la même substance, en sorte ... staux de chacune d'elles renfermaient un ... parfaitement semblable à celui qui était en... dans le prisme sur lequel j'avais opéré; mais ... idée avait contre elle une difficulté qui parais... d'autant plus embarrassante, qu'elle était sug... par l'espèce de forme à laquelle appartenait le ... noyau dont il s'agit. Elle consistait en ce qu'il existe parmi les cristaux de chaux carbonatée divers rhomboïdes que j'ai déjà cités plus haut, dont l'un, qui est beaucoup plus obtus, a son angle plan du sommet de $114^d\ 18'$, et les autres qui sont aigus, offrent au même endroit un angle qui est successivement de $75^d\ 31'$, de $45^d\ 34'$ et de $37^d\ 31'$.

Il était difficile de concevoir comment la forme rhomboïdale, en supposant qu'elle fût toujours celle du noyau, serait restée semblable à elle-même, sans aucune variation, dans des cristaux qui la présentaient à l'œil sous des traits si différens des siens, et qui, comparés entre eux, n'avaient rien de commun que cette même forme prise en général.

Mais l'observation fit disparaître le paradoxe que semblait offrir le contraste entre les formes extérieures de ces rhomboïdes et celles de leur noyau, et elle prouva que ce noyau, en conservant ses dimensions et ses angles, était inscrit symétriquement dans chacun d'eux. Il ne s'agissait pour l'obtenir que de trouver les différens sens suivant lesquels devait

être divisé le rhomboïde qui le renfermait; c'est ce que je vais éclaircir par des exemples.

38. Je choisirai d'abord le rhomboïde obtus de 114° 18′, que je nomme *équiaxe*, et que représente la figure 38, avec le noyau qui lui est inscrit. Dans ce cas, les plans diviseurs doivent être dirigés de manière qu'ils interceptent les six angles solides latéraux *y*, *p*, *r*, *s*, etc. (fig. 39), et que leurs intersections avec les faces du rhomboïde soient parallèles aux diagonales obliques. Par exemple, le plan qui intercepte l'angle solide *z* (fig. 39), doit couper les deux faces *aprz*, *qrsz*, suivant des lignes *db*, *dc*, parallèles aux diagonales *ar*, *ax*, d'où il résulte que ce plan détachera une pyramide triangulaire dont la base *bcd* sera parallèle à la face AEOI (fig. 38) du noyau. On concevra de même que le plan *b′ c′ d′* (fig. 39), qui intercepte l'angle solide *u* opposé à l'angle *z*, doit détacher une pyramide triangulaire dont la base *b′ c′ d′* sera parallèle à la face A′KGH (fig. 38) du noyau. En appliquant le même raisonnement aux autres plans, on aura le rudiment de la division mécanique, dont l'effet est de mettre à découvert six triangles isocèles parallèles aux faces du noyau, et il est à remarquer que déjà les angles aux sommets de ces triangles, tels que *cdb*, *c′d′b′*, sont égaux aux angles obtus EAI, HA′K (fig. 38) des rhombes du noyau, et ont pour mesure 101° 32′, comme ceux du rhomboïde retiré du prisme hexaèdre régulier.

39. On continue la division, parallèlement aux

mêmes triangles, les joints naturels mis à découvert par les plans diviseurs finiront par coïncider avec les diagonales obliques *ax*, *ar*, *a'p*, etc. du rhomboïde *arxa'* (fig. 39); et à ce terme, le noyau se trouvera isolé. Il suit de tout ce que je viens de dire, que l'axe du rhomboïde circonscrit est égal à celui du noyau, que les bords supérieurs de ce dernier se confondent sur une même direction avec les diagonales obliques du rhomboïde dont il s'agit, et que ses angles solides latéraux E, O, I, K, etc. (fig. 38) sont tournés vers les faces du même rhomboïde. De là naît une considération qui s'étend à tous les rhomboïdes dont j'ai à parler dans cet article. Elle consiste en ce que dans tous les solides de cette espèce les parties semblables situées trois à trois vers chaque sommet alternent entre elles, et parce que le noyau est toujours disposé symétriquement à l'égard du rhomboïde qui le renferme, la double alternative qui en résulte produit un assortiment de deux rhomboïdes dont l'un est inscrit dans l'autre.

29. Je passe au second exemple, que je tirerai du rhomboïde aigu dans lequel l'angle plan du sommet est de $75^d\ 31'$, et que la figure 40 représente circonscrit à son noyau. Je le nomme *chaux carbonatée inverse*, pour une raison que j'exposerai dans la suite. Je me bornerai à indiquer la marche que doit suivre la division mécanique, pour en extraire le noyau, que l'observation prouve être semblable à celui que renferment les deux variétés précédentes.

Un coup-d'œil jeté sur la figure suffit pour faire juger que les bords supérieurs *ad*, *at*, *ab* du rhomboïde circonscrit, et ceux qui leur correspondent vers le sommet opposé, sont parallèles aux diagonales obliques du noyau. Ainsi, les plans diviseurs doivent être dirigés parallèlement aux bords dont il s'agit, en faisant des angles égaux avec les faces adjacentes. Il en résulte que les trois plans qui interceptent les bords supérieurs contigus à un même sommet *a* (fig. 41), mettent à découvert trois pentagones alongés *flsor*, *xuzos*, *ypzor*, dont les parties supérieures se réunissent en un angle solide semblable à celui qui est contigu au sommet A (fig. 40) du noyau. A mesure que l'on continue la division mécanique, les pentagones s'élargissent d'abord en se rapprochant du noyau, puis s'entrecoupent, et finissent par se confondre avec les rhombes du même noyau.

Le troisième exemple se rapporte au rhomboïde que représente la figure 42 circonscrit de même à son noyau. L'angle *baf* de son sommet n'est que de 45° 3′. Ce n'est pas cette grande différence entre ses angles et ceux de son noyau qui m'a suggéré le nom de *chaux carbonatée contrastante* que je lui ai donné, mais une propriété remarquable dont il jouit et que je ferai connaître dans la suite. On juge aisément, à la première vue de la figure, que les faces de ce rhomboïde sont tournées vers celles du noyau, en faisant avec l'axe des angles beaucoup plus aigus. Cette cor-

rélation indique que les sections *lm*, *lx*, *mx* (fig. 43) des plans diviseurs sur les faces du rhomboïde, doivent être parallèles à ses diagonales horizontales; ces mêmes plans en partant des sections dont il s'agit, s'inclinent vers l'axe, de manière que les angles qu'ils font avec les faces *bafr*, *bauc*, etc. du rhomboïde, sont de 149° 2′, d'où il suit qu'ils forment par leur réunion une pyramide triangulaire *lxmy*, semblable à celle qu'on détacherait à l'aide d'un plan mené par les trois angles E, I, G (fig. 42) du noyau. Dans les divisions ultérieures, les nouveaux triangles mis à découvert s'approchant de plus en plus du noyau, arrivent à un terme au-delà duquel ils s'entrecoupent par leurs angles latéraux, et passent par degrés à la figure du rhombe. Ils ne sont plus alors distingués des faces du noyau.

30. Le quatrième exemple me sera fourni par un rhomboïde encore plus aigu que le contrastant, dans lequel l'angle plan du sommet est de 37° 31′. C'est celui que représente la figure 44, en rapport de position avec son noyau, et auquel j'ai donné le nom de *chaux carbonatée mixte*. Ce rhomboïde présente le cas inverse du précédent, c'est-à-dire que ce sont ses bords obliques qui regardent les faces du noyau. Dans ce cas les plans diviseurs situés vers un même sommet *s*, partent de trois points pris sur les bords dont il s'agit, et mettent à découvert trois trapézoïdes *prsn*, *utsn*, *xtsr* (fig. 45), inclinés de 155° 50′ sur les mêmes bords, et dont les triangles

latérales d'une pyra-
de ses angles et par sa
analogues font naître
(fig. 43), et qui a son
comme de soi-même,
ce qui doit arriver jus-
rhomboïdes se trouvent convertis
correspondent avec ceux du noyau.
rhomboïdes que je viens de
la nature présente isolément.
trent comme élémens, avec
dans des formes cristallines
composées. Le nombre de ceux que
est de seize, en y comprenant

manière de diviser mécaniquement
rhomboïdes, j'ai suivi une marche mé-
laquelle on voit s'opérer, pour
, le passage gradué du rhom-
qu'il renferme comme noyau.
on peut, avec de l'habitude et
beaucoup plus promptement
opération indique comme d'elle-
de l'abréger.

cristaux calcaires, d'une forme
successivement à la division
des résultats analogues à celui
les rhomboïdes. Je me bornerai
tré du dodécaèdre à triangles

scalènes que représente la figure 46, circonscrit à son noyau. Je le désigne par le nom de *chaux carbonatée métastatique*, dont l'interprétation sera donnée dans la suite par le développement des propriétés intéressantes dont il jouit. La manière d'obtenir tout d'un coup le rhomboïde qui fait ici l'office de noyau s'offrira comme d'elle-même, si l'on fait attention que les bords inférieurs EO, OI, IK etc. de ce rhomboïde se confondent avec ceux des triangles scalènes du dodécaèdre. Il en résulte que si l'on fait passer trois plans diviseurs par ces mêmes bords pris deux à deux, suivant l'ordre où ils forment des angles rentrans EOI, IKG, GHE, tournés vers le point S, ils mettront à découvert les trois faces contiguës au sommet supérieur A du noyau. On répétera ensuite la même opération, en reprenant les mêmes bords deux à deux, suivant l'ordre alternatif, où leurs angles rentrans OEH, KIO, KGH, sont tournés vers le point s', et l'on achèvera d'isoler le noyau.

Maintenant, comme la forme du dodécaèdre diminue uniformément de part et d'autre, en partant des bords inférieurs du noyau, si l'on choisit le long des arêtes obliques *os*, *ks*, *hs* (fig. 47) les plus longues, trois points *n*, *x*, *p*, pris à la même distance du sommet *s*, les plans *rptu*, *ruxz*, *rpnz*, menés par ces points, parallèlement aux bords EO et OI, IK et KG, GH et HE (fig. 46) mettront à découvert trois rhombes parallèles et semblables à ceux qui terminent le noyau du même côté. Le même résultat

ura lieu en sens contraire, à l'aide des trois plans
iviseurs $r'p't'u'$, $r'u'x'z'$, $r'p'n'z'$ analogues aux pre-
iers, et en continuant l'opération vers le centre,
n aura une série de rhombes croissans, dont chaque
me offrira l'aspect du noyau. Au contraire, lorsque
n sous-divise les rhomboïdes dont j'ai parlé d'abord,
s joints naturels passent par degrés de la figure du
angle ou du trapézoïde à celle du rhombe, par
e suite de la manière dont le noyau est engagé
ns ces rhomboïdes.

Les cristaux de toutes les autres substances miné-
les, soumis successivement à la division mécanique,
t servi à prouver la généralité du résultat, à l'é-
ed duquel la chaux carbonatée avait pris l'initiative.
ux qui appartiennent à une même espèce donnent
noyau d'une forme particulière et constante.
nsi, dans l'amphibole, le pyroxène, le glaubérite,
plomb chromaté, l'arsenic sulfuré, c'est un prisme
lique rhomboïdal, dont la base est plus ou moins
linée à l'axe, et dont les faces latérales font entre
s des angles plus ou moins ouverts, suivant l'es-
ce à laquelle il appartient. Dans la chaux phos-
atée, l'émeraude, la cordiérite, la pinite, le cuivre
furé, c'est un prisme hexaèdre régulier, dans lequel
pport entre le côté de la base et la hauteur, dé-
miné par la théorie, varie de même d'une espèce
utre. Dans le corindon, le quarz, la tourmaline,
habasie, le fer oligiste, c'est un rhomboïde plus
moins obtus ou aigu. Dans l'arragonite, le tri-

phane, le plomb carbonaté, le plomb sulfaté, le cuivre phosphaté, l'antimoine sulfuré, etc., c'est un octaèdre qui emprunte de même des caractères spécifiques du rapport de ses dimensions et de la mesure de ses angles. Les formes des molécules intégrantes participent des diversités que présentent les solides qui en sont des assemblages.

32. La forme du noyau se rencontre, comme produit immédiat de la cristallisation, parmi celles des variétés de diverses substances, et un grand nombre de ces variétés présentent des faces parallèles à celles du noyau renfermé dans leur intérieur, combinées avec d'autres faces qui dépendent des lois auxquelles est soumise la structure, ainsi que je l'expliquerai dans la suite.

33. Lorsqu'un cristal se prête difficilement à la division mécanique, on peut encore déterminer les positions de ses joints naturels par différens moyens, dont le plus simple est fondé sur l'observation que je viens de citer. On reconnaît chacun des joints dont il s'agit, lorsque ayant fracturé le cristal de manière à laisser subsister en partie la face qui est parallèle à ce joint, on le fait mouvoir à une vive lumière. Il arrive alors qu'au même instant où le résidu de la face dont je viens de parler renvoie à l'œil les rayons réfléchis, on aperçoit à l'endroit de la fracture d'autres reflets qui partent des lames intérieures, en sorte qu'en faisant tourner le cristal en divers sens, on voit paraître et disparaître simultanément les rayons qui produisent les deux reflets. On en conclut qu'il existe

dans l'intérieur du cristal un joint naturel situé parallèlement à la face dont j'ai parlé.

34. Les formes des noyaux obtenus par la division mécanique de tous les cristaux connus, que j'appellerai désormais *formes primitives*, se rapportent aux cinq genres suivans : le parallélépipède, l'octaèdre, le tétraèdre qui est toujours régulier, le prisme hexaèdre, pareillement régulier, et le dodécaèdre à plans rhombes, tous égaux et semblables.

Formes des molécules intégrantes.

35. Dans les résultats précédens, nous n'avons conduit la division mécanique que jusqu'au terme où elle avait isolé le noyau du cristal qui lui était soumis, parce que déjà la forme de ce noyau pouvait être considérée comme un lien commun, qui unissait toutes les variétés relatives à une même espèce. Nous verrons ce lien se resserrer davantage, et les rapports qu'il fait naître entre les mêmes variétés devenir plus intimes, à l'aide des observations suivantes et des conséquences qui en découlent.

La sous-division de la forme primitive, parallèlement à ses différentes faces, dont nous allons nous occuper, présente plusieurs cas différens qui dépendent de l'espèce de solide à laquelle appartient celle que l'on considère.

Si c'est un parallélépipède, il est bien évident que sa sous-division donne de petits parallélépipèdes semblables à lui-même; mais toutes les autres formes

sous-divisées parallèlement à leurs faces, se résolvent en petits solides d'une forme différente. Prenons pour exemple le prisme hexaèdre régulier, et pour plus grande simplicité supposons que les plans diviseurs, parallèles aux faces latérales, passent par les centres des bases, le prisme se trouvera partagé en six prismes partiels qui auront pour bases des triangles équilatéraux; et si l'on multiplie les divisions suivant des directions parallèles aux premières, et suivant d'autres parallèles aux bases, on aura toujours pour résultat un assemblage de prismes triangulaires équilatéraux, ainsi qu'il est facile d'en juger par l'inspection de la figure 48. Mais ce qu'il est essentiel d'observer, c'est que ces prismes sont tellement disposés, qu'étant pris deux à deux, ils forment des parallélépipèdes indiqués par AO*ip*, *pi*ζ, etc. (fig. 49), et qui, dans le cas présent, peuvent être considérés comme des prismes droits de 120^d et 60^d ; et il est visible que le prisme hexaèdre régulier peut être conçu comme un assemblage de pareils prismes.

36. Proposons-nous encore de sous-diviser le dodécaèdre rhomboïdal parallèlement à ses différentes faces, en faisant passer les plans diviseurs par le centre du solide.

Soit *ep* (fig. 50) un de ces dodécaèdres. Supposons des plans coupans qui passent par le centre, et dont chacun soit parallèle à deux faces opposées du dodécaèdre. Il est d'abord évident que ces plans seront au nombre de six. De plus chacun d'eux, par exemple

celui qui est parallèle aux rhombes *dlfn*, *bohk*, passera par la diagonale *gy*, par les deux arêtes *ye*, *er*, par la diagonale *rq*, et par les deux arêtes *qp*, *pg*, c'est-à-dire que chaque plan passera par deux petites diagonales et par quatre arêtes. Or il y a en tout douze petites diagonales et vingt-quatre arêtes distinctes, dont chacune est commune à deux rhombes voisins; d'où l'on conclura que les six plans opèrent des sections sur toutes les arêtes et sur toutes les diagonales obliques du dodécaèdre. Donc il y aura toujours trois plans qui passeront par les trois côtés de chaque triangle, tel que *ylg*, ou *yog*, qui forme la moitié d'un rhombe coupé dans le sens de sa petite diagonale; et puisque ces plans passent en même temps par le centre *c*, ils détacheront une pyramide triangulaire, ou un tétraèdre. Donc le dodécaèdre se trouvera décomposé en vingt-quatre tétraèdres dont chacun aura pour faces quatre triangles isocèles égaux et semblables. Remarquons que ces tétraèdres, pris six à six, forment quatre rhomboïdes, dont chacun a l'un de ses sommets, tels que *y*, *h*, *f*, ou *r*, situé à l'extérieur, et l'autre au centre *c* du dodécaèdre. La figure 51 représente séparément le rhomboïde dont le sommet extérieur est au point *y*.

37. Je m'abstiendrai de parler ici de la sous-division des autres formes primitives, dont les résultats, moins simples que les précédens, conduisent à des solides de deux formes différentes. Je me bornerai à dire pour le présent que ce défaut de simplicité n'inté-

rense point la théorie, qui parvient aussi sûrement à son but, dans ces sortes de cas, que dans ceux qui ont rapport au parallélépipède, au prisme hexaèdre régulier, et au dodécaèdre rhomboïdal.

Nous venons de voir que la sous-division de ces trois genres de solides, parallèlement à leurs différentes faces, conduit à trois formes différentes, qui sont le tétraèdre, le prisme triangulaire et le parallélépipède. Or, comme il faut au moins quatre plans pour circonscrire un espace, il en résulte que les trois formes dont il s'agit ayant successivement leur surface composée de 4, 5 et 6 plans, sont les plus simples que l'on puisse concevoir. Nous verrons dans la suite que le tétraèdre est toujours un des deux solides offerts par la sous-division des formes primitives, différentes de celles que j'ai prises pour exemples, et que l'on peut, à l'aide d'une hypothèse plausible, donner l'exclusion à l'autre solide, ou le considérer comme nul.

38. Nous n'avons considéré jusqu'ici que les solides qui résultent de la sous-division des formes primitives suivant des directions parallèles aux faces qui terminent celles-ci. Or, l'observation indique aussi dans certaines formes primitives des joints situés suivant des directions différentes de celles qui correspondent aux faces. Je me bornerai ici à ce qui regarde le parallélépipède, me réservant à faire connaître les résultats des observations relatives aux autres formes dans les articles destinés pour la partie

analytique, où je traiterai de ces formes. Voici quelques exemples qui se rapportent au cas dont je viens de parler.

Le prisme droit rhomboïdal *bh* (fig. 52), qui est la forme primitive de la staurotide, et dans lequel les pans les plus inclinés M, M, font entre eux un angle de 129^{d} 30′, se sous-divise dans le sens d'un plan qui passerait par les petites diagonales *bd*, *fh* des bases, en deux prismes triangulaires isocèles égaux et semblables, d'où l'on voit que ces prismes sont réunis de la même manière que ceux qui composent les prismes rhomboïdaux, dont le prisme hexaèdre regulier peut être considéré comme l'assemblage. Dans la forme primitive de la baryte sulfatée, qui est un prisme de la même espèce, mais dont les pans M, M (fig. 53) sont inclinés l'un sur l'autre de 101^{d} $\frac{1}{2}$, la sous-division a lieu dans le sens des deux diagonales *bi*, *dk* et *xy*, *hr* des bases, ce qui donne pour résultat quatre prismes triangulaires dont les bases sont des triangles rectangles scalènes *bok*, *boa*, etc., égaux et semblables. Les prismes obliques rhomboïdaux, qui offrent les formes primitives de l'amphibole et du pyroxène subissent des divisions analogues à la seconde de celles dont je viens de parler. Dans le rhomboïde primitif A A′ (fig. 54) de la tourmaline, dont deux faces adjacentes prises vers un même sommet forment entre elles un angle de 133^{d} 26′, chacun des plans diviseurs qui sont au nombre de six, passe par une diagonale oblique, telle que A*o*, par l'axe A A′,

et par l'arête A'*o*, comprise entre la même diagonale et l'axe, d'où il suit que les six coupes détachent autant de tétraèdres, dont les faces prises deux à deux, telles que AE*o*, A*o*E, et AEA', A*o*A', sont égales et semblables. Il en résulte que ces six tétraèdres sont assortis entre eux de la même manière que ceux qui composent les rhomboïdes dont la réunion produit le dodécaèdre rhomboïdal.

Ces solides, les uns prismatiques, les autres tétraèdres, donnés par la sous-division d'un parallélépipède qui fait la fonction de forme primitive, étant les analogues de ceux dont j'ai parlé d'abord, me paraissent devoir être placés à côté d'eux, dans l'ordre de la structure.

39. Maintenant la division physique d'un minéral auquel je fais subir une des opérations dont je viens de parler, par exemple celle de la chaux carbonatée, a nécessairement un terme, et si j'avais des organes assez délicats pour atteindre ce terme, j'arriverais à des corpuscules quelconques que je ne pourrais plus sous-diviser ultérieurement sans séparer les molécules de chaux et d'acide dont ils sont les assemblages. La supposition la plus naturelle que je puisse faire ici, est que la route que j'ai prise est celle qui conduit à ce terme, c'est-à-dire que ce qui est au-delà du point où je cesse de voir ressemble à ce que j'avais vu jusqu'alors. Or, dans cette hypothèse, les corpuscules dont je viens de parler seraient des rhomboïdes d'une extrême ténuité, et de la même figure que ceux d'un

volume sensible que j'avais d'abord obtenus. Ainsi nous admettrons dans les minéraux deux sortes de molécules; les unes que j'appelle *molécules intégrantes*, et qui sont censées être les plus petits solides que l'on puisse extraire du minéral sans altérer sa nature, et les autres que j'appelle *molécules principes*, *molécules élémentaires*, et qui sont, dans le cas présent, d'une part celles de la chaux, et de l'autre celles de l'acide carbonique.

J'observerai que si ces corpuscules auxquels j'arrive, en continuant, par la pensée, la division mécanique jusqu'à sa limite, ne représentent pas exactement ceux sur lesquels agit l'affinité dans la production des cristaux, ils nous en offrent les équivalens; et les résultats que nous obtenons, en les adoptant, sont si parfaitement conformes à l'observation, que nous ne serions pas censés nous être trompés, en prenant les molécules de la théorie pour celles de la nature.

Nous admettrons donc trois formes de molécules intégrantes employées par la cristallisation dans la production des corps réguliers qu'elle offre à notre observation, savoir, le tétraèdre, le prisme triangulaire et le parallélépipède. Ces formes si simples et en même temps si fécondes par la grande variété des résultats qu'elles sont susceptibles de faire naître relativement à une seule espèce de minéral, semblent encore se multiplier par le rapport de dimensions qui distingue chacune d'elles comparée à elle-même dans différentes espèces.

Molécules soustractives.

40. Nous avons vu que les prismes triangulaires donnés par la division mécanique du prisme hexaèdre régulier sont assortis entre eux, comme si étant liés invariablement deux à deux, ils formaient des prismes rhomboïdaux, en sorte que le prisme hexaèdre peut être conçu comme un assemblage de ces mêmes prismes. Le dodécaèdre rhomboïdal présente une structure analogue à la précédente. Les tétraèdres que l'on en retire, à l'aide de la même opération, sont arrangés de manière qu'étant pris six à six, ils composent des rhomboïdes dont la somme équivaut à ce dodécaèdre. La même chose était faite, pour ainsi dire d'avance, à l'égard des prismes triangulaires et des tétraèdres offerts par la sous-division des diverses formes primitives qui se rapportent immédiatement au parallélépipède.

Or, les applications de la théorie aux formes cristallines dont les molécules intégrantes sont des prismes triangulaires ou des tétraèdres, soit que leur forme primitive diffère ou non du parallélépipède, s'assimilent à celles où les formes qu'elle considère ont pour molécules des parallélépipèdes semblables au solide primitif, c'est-à-dire que, dans le premier cas, la théorie atteint son but, en faisant faire aux parallélépipèdes composés de prismes triangulaires ou de tétraèdres, les mêmes fonctions que celles qui,

dans le second cas, dérivent de la forme propre des parallélépipèdes indivisibles ou censés tels.

Je donne le nom de *molécules soustractives* à ces petits parallélépipèdes qui sont comme les élémens dont la considération suffit à la théorie, pour les distinguer des molécules in[illegible]grantes qui souvent les compliquent par leur réunion. Dans les cas où aucune observation n'indique la sous-division de ces parallélépipèdes, il est évident que la molécule soustractive est semblable à la molécule intégrante.

[illegible] suit de là que l'on peut considérer la molécule soustractive comme une unité sur laquelle opère la théorie, sans aucun égard à la sous-division qui pourrait avoir lieu de cette unité en fractions représentées par les molécules intégrantes. Ce point de vue qui a le double avantage de généraliser la théorie et d'en simplifier les applications, écarte de plus les difficultés qui pourraient faire naître l'embarras de savoir si nous connaissons bien les derniers résultats de la division mécanique, ceux qui nous offriraient les véritables molécules soustractives dans l'état d'isolement.

C'est par un motif [illegible] sur ce qui précède que, sans exposer ici les lois auxquelles est [illegible] la structure des cristaux, je me bornerai aux formes dont le noyau est un parallélépipède, parce que je n'ai en vue que d'y donner une idée de la *marche générale* de la cristallisation, et de la manière d'agir des lois dont il s'agit. Je réserve pour la partie analytique les détails relatifs à la théorie des autres

formes qui ont pour noyau un solide différen parallélépipède, et pour molécules soustractives assemblages de molécules intégrantes prismati ou tétraèdres.

Des lois auxquelles est soumise la structur cristaux.

42. Nous n'avons considéré jusqu'ici que les tériaux qui entrent dans la construction des cri et nous avons vu que les formes des molécules q ont fournis sont limitées à celles des trois solid plus simples que l'on puisse imaginer. Il reste a tenant à expliquer comment la cristallisation vient à faire sortir d'un espace si resserré cette m tude presque infinie de corps si diversifiés p nombre, par les figures et par les combinaison faces qui les terminent.

Pour concevoir en général la marche des lois toutes ces diversités sont les résultats, observon les lames que nous détachons lorsque nous div un cristal, en partant des points les plus éloign centre, jusqu'à ce que nous arrivions au m augmentent progressivement d'étendue, à m qu'elles se rapprochent davantage de ce noyau pour se faire une idée du mécanisme de la stru dans le passage du noyau aux formes secondai ne s'agit que de prendre les lames dans l'ord verse, et il est bien évident que, prises de cett nière, elles décroissent progressivement, à m

qu'elles s'écartent du noyau, par la soustraction d'une certaine quantité de molécules destinées à les compléter, dans le cas où elles auraient enveloppé le noyau, qui n'aurait fait alors que s'accroître, en restant toujours semblable à lui-même. Et comme le décroissement se fait d'une manière uniforme et régulière, puisque son effet est de faire naître des faces planes ou qui nous paraissent telles, nous en conclurons que les lames dont il s'agit et que j'appelle *lames de superposition*, subissent leur décroissement de manière à conserver toujours des figures rectilignes.

43. Avant d'aller plus loin, je ferai une observation importante pour l'intelligence de ce qui précède, et qui s'étend à tout ce que je dirai dans la suite. Elle consiste en ce que, dans la réalité, un cristal n'est autre chose depuis son centre jusqu'à sa surface, qu'un assemblage de molécules disposées symétriquement, c'est-à-dire que la distinction entre le noyau et la matière enveloppante n'est qu'un moyen de faciliter les applications de la théorie. Comme le noyau donné par la division mécanique poussée jusqu'à un certain terme est une partie constante qui est commune à toutes les variétés d'une même espèce, nous considérons chaque cristal comme étant composé de cette constante, plus d'une variable dont la détermination est l'objet de la théorie.

Je ferai voir dans un article à part que le cristal naissant est déjà semblable à celui que la nature nous présente entièrement formé, et qu'il ne faut

ensuite que s'accroître par une succession de couches qui se recouvrent mutuellement. La structure se combine avec cette augmentation de volume, et les choses se passent comme si la cristallisation avait commencé par produire un noyau égal et semblable à celui que nous obtenons à l'aide de la division mécanique, et qu'ensuite ce noyau se fût accru par une superposition de lames analogues à celles que nous détachons successivement, au moyen de la même opération. En un mot, je donne ici l'ordre de la structure et non celui de l'accroissement, parce que la considération du premier est le véritable guide que doit suivre la théorie pour arriver à son but, en partant d'un fait donné par l'observation, qui est l'existence du noyau, et en ramenant à ce fait toutes les variations que subissent les formes dont la structure n'est que la continuation de celle du même noyau, soumise à certaines lois que je vais exposer.

44. Il suit de ce que j'ai dit plus haut, que les faces des cristaux secondaires ne sont autre chose que la somme des nouveaux bords qui résultent de l'alignement des molécules aux endroits où les lames de superposition subissent des décroissemens, d'où l'on doit conclure que la différence entre une lame et la suivante, vers les mêmes bords, est toujours égale à une ou plusieurs rangées de molécules soustraites. Or, on peut prendre ces rangées suivant diverses directions, que je commencerai par faire connaître, avant d'arriver au développement de la théorie.

D'après ce que j'ai dit plus haut, toutes c
peuvent être conçues comme des unités
par la cristallisation à la formation du
ique, sans qu'il soit besoin d'avoir égar
ivisions que ces unités pourraient être
e subir, et qui conduiraient à des mol
rantes d'une autre forme. Mais les diff
ières d'agir des lois auxquelles sont sou
ur arrangement les molécules qui pr
atière surajoutée au noyau, exigent que
dérions ces molécules tantôt comme cor
ire la fonction d'unités, ce qui est le
dinaire, tantôt comme formant des mol
dre supérieur, qui seront des assemblages
nités prises deux à deux, comme *a* et
et *l*, etc., ou trois à trois, comm *a*, *b* et *c*
l et *m*, etc., c'est-à-dire que dans ce d
s forces d'où dépend la cristallisation ag
s molécules composées dont je viens
ivant des lois analogues à celles

faces extérieures sont sur une même ligne droite. Si les molécules sont simples, il y aura deux cas qui satisferont à cette condition; dans le premier, la ligne qui traverse les centres, et à laquelle je donne, pour abréger, le nom de *ligne centrale*, est parallèle à l'un des bords de la face primitive que l'on considère. Ainsi toutes les molécules désignées par a, b, c, d, etc. (fig. 56), dont les faces extérieures ont leurs centres sur la ligne FG, forment une rangée. Dans l'autre cas, la ligne centrale est parallèle à l'une des diagonales de la même face; ainsi les molécules désignées par v, x, y, z, q, f, dont les faces extérieures ont leurs centres sur la ligne NL parallèle à la diagonale AC, forment également une rangée.

Lorsque les molécules sont composées, la ligne centrale n'est parallèle ni à un côté ni à une diagonale, mais elle fait avec l'un et l'autre un angle qui varie suivant le degré de composition.

45. Supposons que les molécules simples soient liées deux à deux comme a, b (fig. 57); menons OK qui coïncide avec la diagonale du petit rectangle relatif aux deux molécules, auquel cas elle passera nécessairement par le centre de ce rectangle; les molécules simples désignées par o et s, t et ε, q et ϵ, etc., formeront une rangée de molécules composées, semblables à celle dont j'ai parlé, en sorte que la ligne centrale TY sera parrallèle à OK.

Prenons les six molécules désignées par k, l, m, a, b, c, pour en composer une seule, dont la face

ligne centrale UZ sera parallèle à cette mè

§6. On peut donc considérer les deux
trales dont l'une est parallèle au côté et
diagonale, comme les deux extrêmes entr
les positions des autres lignes centrales peu
presque à l'infini. Mais nous verrons dans
cette variation est restreinte par la crista
manière à ne pas dépasser un certain degr
cité, en sorte qu'ici comme dans un gra
d'autres phénomènes, l'observation pres
mates à la théorie, qui n'en connaîtrait
elle restait abandonnée à elle-même.

§7. C'est par des soustractions d'une c
rangées de molécules, soit simples soit c
que s'opèrent les décroissemens des lames
sur le noyau. On appelle *décroissemens su*
ceux dans lesquels la ligne centrale est pa
bords ; *décroissemens sur les angles* ceu
quels la même ligne est tournée vers une

Décroissemens sur les bords.

48. Soit AG (fig. 58) un prisme droit symétrique faisant la fonction de forme primitive à l'égard des cristaux d'une substance minérale; ce prisme peut être conçu comme résultant de la superposition d'un certain nombre de lames carrées, situées parallèlement aux bases, et composées chacune d'un égal nombre de petits prismes semblables au prisme total, et il est bien évident que si la superposition continuait avec la même uniformité en partant des deux bases, le prisme ne ferait autre chose que s'accroître dans le sens de sa hauteur, en conservant la même épaisseur.

Supposons une suite de lames appliquées sur la base ABCD, et soumise à un décroissement sur les bords qui soit le même pour tous. La première lame aura vers chaque bord une ou plusieurs rangées de moins que dans le cas où le prisme aurait continué de croître en hauteur, sans varier dans son épaisseur. La seconde comparée à la première en différera du même nombre de rangées, et ainsi de suite.

Or, il est facile d'abord de concevoir que l'effet du décroissement poussé jusqu'à sa limite sera de produire une pyramide droite quadrangulaire ABCDO (fig. 32, pl. 2) qui reposera sur la base ABCD, et dont les faces seront interrompues par des angles alternativement rentrans et saillans, semblables à ceux que font entre eux les degrés d'un escalier, en sorte

que dans la réalité elles ne seront autre chose qu'un assemblage de lignes situées aux endroits des arêtes saillantes. Mais telle est la ténuité des molécules, que les inégalités dont il s'agit échapperont à l'œil, en sorte que les faces de la pyramide s'offriront sous l'aspect de plans continus, du moins en supposant que la cristallisation ait atteint tout le fini dont elle est susceptible.

49. Je n'ai considéré l'effet du décroissement que par rapport à la base supérieure ABCD de la forme primitive. Mais la symétrie avec laquelle agissent les lois de la structure exige qu'un pareil décroissement fasse naître sur la base inférieure une autre pyramide égale et semblable à la première, et à laquelle on peut appliquer tout ce que j'ai dit de celle-ci.

Soient $C\mu\nu\varepsilon$, $C\varepsilon\delta\gamma$, $C\mu\lambda\gamma$ (fig. 58) les trois faces analogues à CDAB, CBLG, CDFG, sur la molécule située en C.

La petite ligne $C\gamma$ perpendiculaire sur les arêtes $C\mu, \gamma\lambda$ sera ce que j'appelle *la dimension en hauteur*, rapportée à la molécule, et les lignes $C\mu$, $C\varepsilon$, perpendiculaires l'une sur CB, l'autre sur CD, seront ce que je considère comme les dimensions en largeur relatives à la même molécule. Désignons $C\gamma$ par h, et $C\mu$ ou $C\varepsilon$ par l.

Soit *emrs* (fig. 59) le même plan que (fig. 58), qui passe par les milieux des arêtes AD, BC, perpendiculairement à la base ABCD. Soit de plus *cdig* (fig. 56) la coupe de la première lame de superposi-

tion, prise sur le même plan ; *fkap* celle de la seconde, *ltvq* celle de la troisième, etc., *mg* indiquera la différence entre la première lame et la seconde, dans le sens de la largeur, en sorte que s'il n'y a qu'une rangée de soustraite, on aura *mg* (fig. 59)$=C\mu$ (fig. 58)$=l$. S'il y a deux rangées soustraites, on aura $mg=2l$, et ainsi de suite. Soit en général n le nombre de rangées soustraites ; on aura $mg=n\times l$.

50. Jusqu'ici nous avons fait abstraction de l'épaisseur des lames de superposition, et nous avons supposé tacitement qu'elle était égale à $C\gamma$ ou à une hauteur de molécule. Mais il peut arriver que chacune de ces lames ait une épaisseur double ou triple, etc. de celle d'une molécule, et que cette épaisseur se combine tellement avec la différence en largeur que l'effet du décroissement soit encore une pyramide. Dans ce cas, si nous désignons par n' le nombre d'épaisseurs de molécules contenues dans celle de chaque lame, nous aurons *gi* (fig. 56)$=n'\times h$.

Si l'on mène les droites *eo*, *mo*, tangentes aux points *d*, *k*, *i*, *a*, etc., elles seront les apothèmes des triangles DOA, COB (fig. 32), et si du point *o* (fig. 59) on abaisse *ob* perpendiculairement sur *em*, l'angle *omb* sera égal à l'incidence de l'une quelconque des faces de la pyramide DCBAO (fig. 32) sur la base ; en lui ajoutant 90^d on aura l'incidence de la même face sur le pan adjacent ; d'une autre part, l'angle *mob* (fig. 59) mesurera la moitié de l'incidence de l'une quelconque des mêmes faces, par

exemple de la face COB (fig 32) sur la face DOA située du côté opposé.

Il est évident que tous les petits triangles *mgi*, qui sont égaux et semblables entre eux, et de plus qui le sont semblables au triangle *mbo*. On donne le nom de *triangle mensurateur* à l'un quelconque de ces triangles, et spécialement à celui qui est situé à la naissance du décroissement, c'est-à-dire dans celui qui est au triangle *mgi*.

Supposons que la forme primitive soit un parallélipipède rectangle (fig 6), auquel cas les faces AB, CD, EF seront avec la base ABCD des angles droits, ne les supposons pas être obtus. Soit $\gamma\gamma$ la section commune située en C, les facettes $C\alpha\gamma\gamma$, $C\alpha$ étant aussi des parallélogrammes obliquangles, et leurs $C\alpha$, $C\beta$ perpendiculaires l'une sur $\gamma\alpha$, tandis que $\alpha\beta$ ne coïncideront plus avec les côtés $C\gamma$, $C\alpha$. Soit n un triangle mensurateur relatif à un décroissement sur le bord BC. On aura comme ci-dessus $n \times C\beta = \gamma\gamma \times h$, et $n \times C\alpha = n' \times C\alpha = n' \times h$; n' étant le triangle qui sera relatif à l'angle $\delta C\alpha$ qui mesure l'inclinaison de CBLG sur ABCD. Donc, connaissant $\gamma\gamma$, $\alpha\beta$ et les angles $C\delta$, $C\alpha$, et de plus le nombre n, il sera facile d'avoir l'angle *img*, et par conséquent la loi primitive par le décroissement sur la face ABCD. On voit aisément ce qu'il y aurait à faire pour construire le triangle mensurateur relatif à un autre décroissement qui agirait parallèlement au bord CD. Les côtés de ce triangle analo-

gues à *mg* et *gi* seraient alors fonctions des perpendiculaires menées du point C sur ν et $\gamma\lambda$, et au lieu de l'angle *mgi* on aurait celui que fait CDFG avec ABCD.

52. Lorsque la relation entre $n \times l$ et $n' \times h$ est telle que n' étant égale à l'unité, n est égale à 2, ou 3, ou 4, etc. le décroissement est dit avoir lieu *en largeur*, par 2, 3, 4 rangées, etc., sur le bord qui lui sert de ligne de départ; lorsqu'au contraire n étant l'unité, n' est égale à 2, ou 3, ou 4, etc., le décroissement est dit avoir lieu *en hauteur*, par 2, 3, 4 rangées, etc. Ainsi, cette expression, *tel décroissement a lieu par 3 rangées en largeur sur tel bord*, suppose tacitement que l'épaisseur de chaque lame de superposition soit égale à une épaisseur de molécule; et cette autre expression, *tel décroissement a lieu par trois rangées en hauteur sur tel bord*, emporte la condition que la quantité dont chaque lame décroit dans le sens de la largeur, soit mesurée par une rangée de molécules.

Mais il peut arriver aussi que n et n' soient égales à des nombres différens et tous deux plus grands que l'unité; par exemple, que l'on ait $n=3$, $n'=2$, ou bien $n=4$, $n'=5$: alors le décroissement s'appelle *mixte*, parce qu'il participe des deux précédens. Dans le cas où $n=1$, et $n'=1$, on dit simplement que le décroissement a lieu par une rangée. Ce cas se rencontre dans plusieurs variétés qui appartiennent à diverses espèces de minéraux. Mais la loi qui le donne

est à NS, c'est-à-dire comme 2*Or* : NS, ou comme 2 : 1, ce qui donne 116d 33′, pour l'incidence cherchée.

54. Je placerai ici une réflexion sur laquelle je me propose de revenir dans la suite avec de nouveaux développemens. J'ai déjà dit que la forme primitive ou le noyau d'un cristal n'était autre chose qu'une donnée prise dans la théorie, pour faciliter la détermination des différentes formes cristallines relatives à une même substance. Les dimensions de cette forme ramenée à sa véritable limite, lorsqu'elles ne sont pas données *à priori*, comme dans le cas du cube, du rhomboïde, du dodécaèdre rhomboïdal, etc., se déduisent de celles qu'il faut supposer à la molécule soustractive, pour que les décroissemens qui donnent les formes secondaires soient, en général, les plus simples possibles. Ce que je viens de dire sert à expliquer pourquoi, dans le cas dont je viens de parler, la cristallisation, qui ne consiste proprement que dans une réunion de molécules, soumises à un arrangement symétrique, substitue aux formes primitives indiquées par la théorie, des solides qui ont à la vérité leurs faces situées parallèlement à celles de ces formes, mais qui s'en écartent plus ou moins par le rapport de leurs dimensions. Ainsi, dans la variété de mésotype qui vient de nous occuper, le prisme a plus ou moins de hauteur relativement à son épaisseur, suivant les cristaux dans lesquels on le considère. Il suit de là que quand on dit des pyramides sur-ajoutées à ce prisme, qu'elles naissent d'un dé-

se combine avec d'autres, d[illegible]
faces qui modifient soit les [illegible] des bases de
interposé entre elles.

53. Soit AS (fig. 61), l[illegible]ons de cette
type, qui est un prism[illegible]port que dans
dans lequel le rapport[illegible]me les pyra-
ON de la base, est [illegible]les qui seraient
qui donne 93[illegible]se, les faces qui
plus, la hauteur[illegible]t, dans les appli-
Or menée du[illegible]qu'on leur corresponden-
Soit OH = [illegible]ment dite.

[illegible]uter les applications
ON = V[illegible] triangle mensurateur
[illegible]eaux auxquels nous les
La [illegible] peut supposer, par
subst[illegible]stitutif au décroissement
quel[illegible](fig. 32), soit situé
mm[illegible]par les arêtes CO, AO,
Pr[illegible]s de la diagonale menée
d[illegible]le triangle dont il s'agit;
([illegible]est censé appliqué sur la
[illegible]re que le point c (fig. 63)
[illegible] fig. 58), renfermera au-
[illegible]que le côté gm (fig. 59)
[illegible]u fig. 58). Donc désignant
[illegible]gt, nous aurons ct (fig. 63)
[illegible], il est évident que son ex-
[illegible]celle du coté gi (fig. 59),
[illegible]dire qu'elle sera n' × h
[illegible]ensurateur dont je viens

de l'incidence de l'une quelconque des ...es de la pyramide (fig. 32) sur la base ... en ajoutant 90[d] à cette incidence ou a ... font entre elles les arêtes CO, CG, ou ... HH', etc.

56. Il arrive souvent que l'effet d'un décroissement s'arrête à un certain terme, en deçà de la limite vers laquelle il tendait. C'est ce qui aurait lieu, par exemple, si la partie ajoutée au noyau (fig. 58) par l'effet du décroissement qui agit sur les bords de la base ABCD, au lieu d'être une pyramide complète, s'offrait sous l'aspect d'une pyramide tronquée parallèlement à sa base. Dans ce cas, les faces produites par le décroissement seraient des trapèzes adjacens par leurs bases supérieures à une face terminale semblable et parallèle à la base ABCD.

57. La baryte sulfatée nous offre un exemple de cette modification dans une variété représentée (fig. 64), et que je nomme *subpyramidée*. La forme primitive est un prisme droit rhomboïdal (fig. 65), dans lequel le rapport des demi-diagonales DP, CP et de la hauteur CG, est celui des nombres $\sqrt{12}$, $\sqrt{8}$ et $\sqrt{21}$. Le décroissement qui donne les faces z, z, etc. (fig. 64), a lieu par deux rangées en hauteur sur les quatre bords de la base ADCB (fig. 65).

Soient $C\epsilon\delta\gamma$, $C\mu\lambda\gamma$, $C\mu\epsilon$, les facettes extérieures d'une molécule soustractive située en C. Menons Cd perpendiculaire sur $\mu\nu$, et dont le prolongement de sera aussi perpendiculaire sur AD.

[illegible] le triangle mensural
[illegible], et $ni = 2C\gamma$. O
[illegible] de la molécule soustrac
[illegible] à celles du noyau, Cd
Sur $DP = \sqrt{12}$, AP ou CP = $\sqrt{}$
Nous aurons

$$AD = \sqrt{(DP)^2 + (AP)^2} = \sqrt{20}.Ce \times$$

ou $Ce \times \sqrt{20} = \sqrt{8.48}$. Donc
Donc $Ce : CG :: \sqrt{\frac{24}{5}} : \sqrt{21} :: \sqrt{32} :$
Donc cni (fig. 66) $:: \sqrt{32} : 2\sqrt{3}$
D'ailleurs l'angle cni est droit; d'apr
l'angle icn est de $64^d\,26'$, et l'angle
d'où il suit que l'incidence de z sur
de $1\overline{54}\,d\,\overline{30}'$, et celle de z sur P de 115^d

38. J'ai supposé que le décroisseme
les intervalles z, z avait une marche
dessus des bords CD, CB, etc. (fig. 65
du corps, en sorte qu'il tendait à

dessus des lignes *tx*, *sx* (fig. 64), qui divisent transversalement les faces M, M en deux parties égales. Alors la base P (fig. 65) sera censée rester intacte, et les lames de superposition partiront des faces M, M, pour s'appliquer les unes sur les autres. On conçoit aisément que si le décroissement atteignait sa limite, la surface du cristal serait composée, dans le sens latéral, de huit trapèzes accolés deux à deux par leurs grandes bases, et compris entre deux faces terminales parallèles et semblables aux bases de la forme primitive. Ayant prolongé indéfiniment la ligne *ic* (fig. 66), prenons sur *cg* une partie *cz* égale à *in*, et menons *zo* perpendiculaire sur *cg*. Le triangle *czo* deviendra mensurateur relativement au décroissement dont nous venons de parler, et il est évident qu'il sera égal et semblable au triangle *inc*, en sorte que *cz* étant égale à *in*, par la construction, *oz* sera égale à *cn*. Donc, puisque *in* est double de C*y* (fig. 65), le décroissement aura lieu par deux rangées en largeur, entre les bords BC, GL d'une part, et CD, GF de l'autre. Si dans le décroissement rapporté aux bases, comme dans la première hypothèse, il y avait trois rangées de soustraites en hauteur, celui qui lui correspondrait vers les faces latérales se ferait par des soustractions de trois rangées en largeur, et ainsi de suite pour les décroissemens plus composés.

59. Concluons de là que si l'on suppose deux décroissemens qui agissent de part et d'autre d'une

que les facettes z, lorsqu'elles se retrouvent sur des variétés de baryte sulfatée, différentes de celle qui vient de nous occuper, y sont combinées avec d'autres facettes dues à des décroissemens dont l'expression la plus simple et la plus naturelle est celle qui suppose leur marche ascendante, j'ai assimilé à cette marche celle du décroissement qui donne les facettes z, en supposant qu'elle ait lieu dans le même sens.

Il peut arriver enfin que des faces analogues à z, z se prolongent de part et d'autre des lignes lr, rn, jusqu'au point de masquer entièrement les bases P et les pans M, M de la forme primitive, auquel cas le solide secondaire sera un octaèdre rhomboïdal. Le choix entre les deux manières de représenter l'effet du décroissement devient alors indifférent en lui-même. Cependant, si aucune raison particulière ne décide de la préférence, je crois plus convenable de la donner à l'expression qui suppose que le décroissement ait une marche ascendante, parce que l'idée que fait naître l'octaèdre dont il s'agit, d'après les relations de position qui existent entre ses différentes faces et son axe vertical, est celle d'un solide composé de deux pyramides jointes base à base, et qu'on se représente naturellement une pyramide comme un assemblage de lames décroissantes superposées depuis la base jusqu'au sommet.

61. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'exposer un résultat général d'observation relatif à l'influence qu'a sur les décroissemens le rapport qui

à indiquer ici ce résultat aussi simple
auquel j'ai donné le nom de *loi de sy-*
proposant d'en développer toutes les con-
dans un article qui lui sera spécialement

Après les conditions énoncées ci-dessus, si
douze bords d'un cube AO′ (fig. 67), que
lons maintenant considérer comme forme
e, un seul subit une loi de décroissement,
autres la subiront également. Supposons que
issement ait lieu par une rangée, les lames
perposition empilées sur les six faces du cube
ont autant de pyramides triangulaires, dont
es se confondront avec elles, ainsi qu'on le
g. 68), et il est clair que les faces de ces pyra-
seront inclinées de 45^{d} sur celles du noyau.
cas présent, où les deux décroissemens qui
ent des deux côtés de chaque bord du cube ont
par une rangée étant la limite de tous les cas où
décroissemens sont inverses l'un de l'autre, les
qui en résultent sont aussi sur un même plan.
ne les vingt-quatre faces qui composent la surface
six pyramides se réduisent à douze faces dis-
ctes qui sont des rhombes égaux et semblables *s*O*t*,
O*r*, *t*O*r*O′, etc. (fig. 68 et 69). Le dodécaèdre
rhomboïdal que nous avons vu au rang des formes pri-
mitives se retrouve ici parmi les formes secondaires,
et nous le verrons dans la suite reparaître sous le
même titre comme modification de l'octaèdre régulier.

existe s
différen
ramené
1°. S.
une for
d'une m
à son im
resteron
a lieu pa
posent d
les autr
autant
remment
que la v
tombât
qu'ils ne
dans les
ou deux
arriver
croisseme
ou que l'
l'autre re
dance ne
dont chac

Les cor
à une autr
condaire
blables sur la
blables en

de la
être dé-
nombre
de 4913,
y rendre
faces du
faces qui se

les axes qui
tels que s, s'
quatre de ses
que $sOsO'$,
que ces faces
d'une autre
qui passent

---

du Jardin du
mes formes dont
tat cet avantage,
sens, sans t plus
ls à croissemens
gt. D'autres so-
mécanique du
dont il est
les solides simples,
que nous avons
à laquelle il
difference
les cristaux

par deux angles solides trièdres, tels que O, A', le dodécaèdre aura six de ses faces situées parallèlement à cet axe, telles que *r*E'*s*'O', O*s*'I'*t*, *t*I'*r*'I, I*r*'A*s*, *s*A*t*'E, E*t*'E'*r*, lesquelles, à cause de la régularité de la forme primitive et de l'action symétrique des décroissemens, font entre elles des angles égaux ; et comme la même disposition se répète dans tous les sens, il en résulte que l'incidence mutuelle de deux faces quelconques adjacentes est de 120^{d}.

La cristallisation nous offre un exemple du décroissement dont je viens de parler, dans une substance pierreuse à laquelle j'ai donné le nom d'*aplome*. La même structure a lieu dans une variété de fer sulfuré où les faces du dodécaèdre rhomboïdal se combinent avec huit facettes triangulaires situées à la place des angles solides trièdres, et qui dépendent d'une loi que je ferai connaître dans la suite.

64. Pour que la lame située au sommet de chaque pyramide se réduise à un simple cube, ainsi que le représente la figure 70, il faut supposer que le côté du noyau soit composé d'un nombre impair d'arêtes de molécules. Dans cette hypothèse, qui est la plus naturelle que l'on puisse faire, les nombres de molécules des lames consécutives, en partant des sommets des pyramides, forment une série dont les différens termes sont les carrés des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, etc., et dont le terme général du rang n est $(2n-1)^2$. Si l'on prend la série en sens inverse, c'est-à-dire en partant des faces du noyau, et si l'on

désigne par C le nombre d'arêtes comprises dans le côté de ce noyau, et par n' le rang d'un terme quelconque, les nombres de celles que renferment successivement les lames de superposition, formeront la progression $C-2, C-4, C-6, C-8$, etc..... $C-2n'$, et les nombres de molécules qui composent ces lames seront égaux aux carrés des termes de cette même série, de sorte que la somme de toutes les molécules comprises dans la lame du rang n' sera $(C-2n')^2$.

La quantité C étant donnée, il est facile de connaître le nombre total N des lames de superposition qui composent une même pyramide, en faisant attention que N est le nombre des termes d'une progression arithmétique décroissante $C-2, C-4, C-6, C-8$, etc...., dont le dernier terme est l'unité. En appliquant ici les formules relatives à ce genre de progressions, on trouvera $N=\frac{C-1}{2}$.

65. On peut déterminer de même en fonction de C le nombre de tous les cubes élémentaires dont le dodécaèdre est l'assemblage. Pour y parvenir, j'observe que le nombre de ceux qui composent l'une quelconque des six pyramides superposées aux faces du noyau est égal à la somme des carrés des termes de la suite arithmétique $1.3.5.7.9....C-2$. Or, si l'on désigne en général par a le premier terme d'une pareille suite, par u le dernier, par r la différence entre deux termes consécutifs, et par s' la

somme des carrés de tous les termes, on a la formule

$$s' = \frac{2(u^3 - a^3) + 3r(u^2 + a^2) + r^2(u - a)}{6r} \text{ (1)}.$$

---

(1) Cette formule, dont l'usage s'étend à toutes les questions du genre de celle qui nous occupe, ne faisant point partie des élémens ordinaires de l'Algèbre, je crois utile d'en donner ici une démonstration simple, qui dispensera le lecteur de recourir aux ouvrages qui en traitent d'une manière spéciale.

Soient $a, b, c, d, \ldots\ldots t, u$, les termes de la progression dont il s'agit, et n leur nombre. Déterminons d'abord leur somme, que je représenterai par s. Nous aurons $b = a + r$; $c = b + r$; $d = c + r$; $\ldots\ldots u = t + r$; et en élevant chaque membre de ces équations au carré,

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + 2ar + r^2, \\ c^2 &= b^2 + 2br + r^2, \\ d^2 &= c^2 + 2cr + r^2, \\ &\vdots \\ u^2 &= t^2 + 2tr + r^2. \end{aligned}$$

Egalant la somme des premiers membres de ces équations à celle des seconds, supprimant les quantités communes aux deux sommes, et transposant a^2 dans la première, on a

$$u^2 - a^2 = 2r(a + b + c + d + \ldots + t) + r^2(n - 1).$$

Or,

$$a + b + c + d + \ldots + t = s - u;$$

donc

$$u^2 - a^2 = 2r(s - u) + r^2(n - 1);$$

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted] nous suivons la même marche, [redacted] celle des cubes, nous [redacted]

[redacted]

[redacted] à celle des se- [redacted] suppositions analogues [redacted]

Si l'on suppose C = 17 comme dans la figure, le nombre dont il s'agit sera égal à 8993.

Si C devient infini, alors $3C^4$ et $2C$ s'évanouissent devant $2C^3$, ce qui indique que la solidité du dodécaèdre considéré comme corps géométrique est double de celle du noyau. Effectivement, si l'on mène par les arêtes du noyau des plans qui passent en même temps par le centre, ils détacheront six pyramides égales à chacune de celles qui sont le résultat du décroissement.

66. Supposons maintenant que chaque bord du cube serve de ligne de départ à deux décroissemens, dont l'un ait lieu d'un côté par deux rangées en largeur, et l'autre du côté opposé par deux rangées en hauteur. On voit d'abord que l'un des décroissemens étant l'inverse de l'autre, les deux faces qui en naîtront se trouveront sur un même plan, d'où il suit que l'on aura encore un dodécaèdre, mais qui devra différer du dodécaèdre rhomboïdal par les figures et les inclinaisons de ses faces. On conçoit de plus que le résultat sera variable suivant les diverses manières dont les directions des décroissemens seront combinées entre elles. Si l'on suppose, par exemple, que le décroissement en largeur agisse parallèlement aux quatre bords des deux faces AEOI, A'E'O'I' (fig. 6?), il produira deux pyramides qui reposeront sur ces mêmes faces. Mais les autres décroissemens qui auront lieu parallèlement aux bords des faces latérales ne pourront produire de semblables pyramides. Ainsi,

Mais [redacted] sur les
dans l [redacted] par
vient [redacted] de l'autre côté des
six py [redacted] le même que celui
on ob [redacted] que l'on arrange
qui c [redacted] OO', II', la simili-
—— [redacted] aux différentes faces
ou bie [redacted] qui est contraire à la
[redacted] ci-dessus. Le seul
n [redacted] les deux condi-
d'où l [redacted] même que des dé-
[redacted] faces adjacentes à un
[redacted] ELA. EOUE', OO'I'I,
Ma [redacted] RS. TN, menées
en su [redacted] opposés, suivant trois
auro [redacted] Supposons que
[redacted]
[redacted] deux triangles
[redacted] pour I est le même
[redacted] autour le côté Th
[redacted] perpen-
et en [redacted] fig. 71)
conc [redacted] dans le sens de la
aux [redacted] fig. 71)
[redacted] aux rangées en
Mett [redacted] fig. 67),
nées [redacted] deux rangées
[redacted] qui a
[redacted]

Soient P*ux*, P*ym* (fig. 72) deux autres triangles mensurateurs dans lesquels le point P est le même que (fig. 67), le côté P*u* (fig. 72) étant dans le sens de PQ (fig. 67), et le côté P*y* (fig. 72) étant situé sur le carré EOO′E′ (fig. 67), perpendiculairement à la ligne RS; d'où il suit que le triangle P*ym* (fig. 72) se rapporte au décroissement par deux rangées en largeur, qui a lieu en allant de EO vers E′O′ (fig. 67), et le triangle P*ux* au décroissement par deux rangées en hauteur qui est l'inverse du précédent, et qui a lieu en allant de EO vers AI (fig. 67).

68. On voit par la disposition de ces triangles que les faces produites en vertu du décroissement qui agit parallèlement aux bords OI, EA, étant inclinées sur les bases d'une quantité égale à l'angle *g*T*h* (fig. 71), tandis que celles qui résultent du décroissement dont les directions sont parallèles aux bords EO, AI (fig. 67), faisant avec les mêmes bases un angle beaucoup plus ouvert, mesuré par *x*P*u* (fig. 72), les quatre faces ne se réuniront plus en un point commun, comme dans l'exemple précédent; mais les premières, qui convergent davantage l'une vers l'autre, iront se rencontrer sur une arête commune située au-dessus de PQ (fig. 67), en sorte qu'elles seront des trapèzes IO*pq*, AE*pq* (fig. 73), tandis que les deux autres seront des triangles OE*p*, AI*q*, qui auront leurs sommets aux extrémités de l'arête *pq*. Les mêmes effets se répéteront sur les faces OII′O′, EOO′E′ (fig. 67); mais les lignes de jonction *pq*,

aux trois faces

opposées) ayant

entre elles, il en ré-

que Ot, Ep, etc.,

trapèze situé de l'autre

la surface du solide

cinq pentagones égaux

).

que dans chaque

les côtés Ot, It, adja-

par une suite de la

symétrie avec laquelle

De plus, chaque trapèze

côtés communs avec les

Ont, savoir, Ot, Os,

mêmes côtés sont égaux

st, qui peut être con-

une commune des pentagones

ailleurs que, dans le cas

que chacun des autres

que je déterminerai, et je

développemens sur les pro-

dont il s'agit, qui diffère essen-

régulier de la Géométrie,

minéralogistes l'ont confondu.

pour le présent, à indiquer l'in-

aux endroits où ils

une commune, par exemple,

nO, nI SI. Cette incidence

est évidemment le double de l'angle T*gh* (fig. 71), qu'il est facile de déterminer, d'après l'observation que le triangle *h*T*g* est rectangle en *h*, et que son côté T*h* est double du côté *hg*, en conséquence de ce que le décroissement qu'il sert à mesurer a lieu par deux rangées de molécules cubiques. En partant de ces données, on trouve que l'angle T*gh*=63d 26′ 6″, d'où il suit que l'incidence cherchée est de 126d 52′ 12″.

On voit (fig. 75) une imitation de la structure qui vient d'être exposée, du même genre que celle que présente la figure 70, et qui se rapporte au dodécaèdre rhomboïdal.

70. Les lames de superposition empilées sur les diverses faces du cube, dans la variété qui nous occupe, étant de niveau deux à deux dans le sens du décroissement en hauteur, tandis que dans celui du décroissement en largeur elles diminuent sans interruption, il en résulte que les nombres de molécules dont elles sont successivement composées forment deux séries, dont l'une comprend tous les cas où le rang *n′* d'un terme donné est un nombre impair, et l'autre ceux où il est un nombre pair.

Pour trouver les formules relatives à ces deux espèces de cas, désignons par *c* le nombre d'arêtes contenues dans le côté du noyau; soit *g* la plus grande dimension des bases rectangulaires de l'une quelconque des lames de superposition, et *p* la plus petite, auquel cas le produit *gp* représentera généralement le nombre de molécules comprises dans chaque

[illegible] Si l'on prend les séries en p
[illegible] il est aisé de voir que p s
[illegible] $c-4$, $c-8$, $c-12$, $c-16$, et
[illegible] il sera égal à $c-4n'$. D'u
[illegible] ivement à $c-2$, $c-$
[illegible] etc.; c'est-à-dire que si n'
[illegible] $g=c-n'-1$, et si n'
[illegible] $g=c-n'$. Donc dans la sé
[illegible] $gp=(c-n'-1)(c-4n')$, et da
[illegible] $gp=(c-n')(c-4n')$, expr
[illegible] qu'en ce que le premier facte
[illegible] d'une unité que celui de l'aut
[illegible] égal à l'unité dans la dernie
[illegible] nombre d'arêtes de molécu
[illegible] bord du noyau soit un mu
[illegible] augmenté de l'unité, en sorte que si l'
[illegible] le nombre total des lames, on d
[illegible] $-4N=1$. Donc, en général, $c=4N+1$.
[illegible] cette valeur de c dans les formules p
[illegible] celle qui est relative aux nombres impa

$$gp=(4N-n')(4N-4n'+1),$$

[illegible] se rapporte aux nombres pairs sera

$$gp=(4N-n'+1)(4N-4n'+1),$$

[illegible] ne diffèrent que par l'addition d'u
[illegible] facteur de la seconde.

[illegible] a été construite dans l'hypoth
[illegible] renfermerait dix-sept arê

de molécules. Donc $c=17$. Or, la formule $c-4N=1$ donne $N=\frac{c-1}{4}$. Donc ici $N=4$. Donc le nombre de molécules contenues dans la troisième lame, prise pour exemple, ou $(4N-n')(4N-4n'+1)$ sera

$$(16-3)(16-12+1)=13.5=65;$$

et le nombre de molécules contenues dans la quatrième lame, ou $(4N-n'+1)(4N-4n'+1)$ sera

$$(16-4+1)(16-16+1)=13.$$

Le solide que nous considérons ici diffère du dodécaèdre rhomboïdal (fig. 70), en ce que, dans celui-ci, la dernière lame se réduit toujours à un simple cube, au lieu que dans l'autre le nombre des molécules qui composent la lame correspondante dépend de celui dont le noyau est l'assemblage.

72. Proposons-nous maintenant de déterminer en fonction de c le nombre de cubes élémentaires qui composent ce dodécaèdre.

Continuons de partager l'ensemble des lames de superposition appliquées sur chaque face du noyau en deux séries, que nous prendrons dans un ordre inverse de celui que nous avons supposé plus haut, c'est-à-dire en allant vers le noyau, en sorte que les termes dont le rang était pair deviendront ceux d'un rang impair, et réciproquement.

Soit dans le cas présent g la plus grande dimension, et p la plus petite dimension de la première lame de chaque série; soit r' la différence entre deux

grandes dimensions consécutives, r'' celle entre les petites dimensions correspondantes, et n le nombre des lames; on aura successivement pour les nombres de cubes qu'elles renferment

$$
\begin{aligned}
&gp;\\
(g+r')\ (p+r'') &= gp+pr' \ +gr'' \ +r'r'';\\
(g+2r')\,(p+2r'') &= gp+2pr' \ +2gr'' \ +4r'r'';\\
(g+3r')\,(p+3r'') &= gp+3pr' \ +3gr'' \ +9r'r'';\\
(g+4r')\,(p+4r'') &= gp+4pr' \ +4gr'' \ +16r'r'';\\
&\vdots\\
[g+(n-1)r'][p+(n-1)r''] &= gp+(n-1)pr'+(n-1)gr''+(n-1)^2r'r''.
\end{aligned}
$$

Réunissant toutes ces quantités, on aura pour l'expression générale de la somme S des lames,

$$
\begin{aligned}
S = ngp &+ [1+2+3+4+\ldots+(n-1)](pr'+gr'')\\
&+ [1+4+9+16+\ldots+(n-1)^2]r'r''.
\end{aligned}
$$

Or, si l'on applique aux deux séries que renferme cette expression, les formules de la page (77), on trouvera

$$1+2+3+4+\ldots+(n-1)=\frac{n^2-n}{2},$$

et

$$1+4+9+16+\ldots+(n-1)^2=\frac{2n^3-3n^2+n}{6};$$

Donc l'équation ci-dessus devient

$$S=ngp+\frac{n^2-n}{2}(pr'+gr'')+\frac{2n^3-3n^2+n}{6}r'r''.$$

Maintenant, si nous supposons que la première lame de la série des termes impairs se réduise à une simple

rangée, nous aurons pour cette série, $p=1$; et pour celle des termes pairs $p=5$.

Dans le premier cas,

$$S=ng+\frac{n^2-n}{2}(r'+gr'')+\frac{2n^3-3n^2+n}{6}r'r'';$$

et dans le second,

$$S=5ng+\frac{n^2-n}{2}(5r'+gr'')+\frac{2n^3-3n^2+n}{6}r'r''.$$

Les valeurs de r', r'', g et n, sont les mêmes dans les deux cas. Si donc on réunit les seconds membres de ces équations, on aura l'ensemble des deux séries, ou

$$6ng+(n^2-n)(3r'+gr'')+\frac{2n^3-3n^2+n}{3}r'r''.$$

Nous avons trouvé plus haut (page 85) $N=\frac{c-1}{4}$; N désignant le nombre total des lames comprises dans les deux séries. Or, $N=2n$; donc, $n=\frac{c-1}{8}$. D'une autre part, g est égal à c moins 2 pris autant de fois que n renferme d'unités. Donc $g=c-2n=\frac{3c+1}{4}$; Enfin $r'=2$, $r''=8$. Substituant dans l'expression ci-dessus les valeurs de n, g, r', r'', et réduisant, on aura $\frac{11c^3-54c^2+43c}{96}$. Multipliant par 6, et ajoutant c^3, qui est le nombre des cubes que renferme le noyau, on obtiendra la somme totale de ceux dont le dodécaèdre est l'assemblage, ou $\frac{27(c^3-2c^2)+43c}{16}$;

comme dans la figure 75, [illegible] à celle des cubes élémentaires, auquel cas $2c^3$ et 430 [illegible] se réduit à $\frac{27}{16}c^3$; c'est-à-dire [illegible] le dodécaèdre comme [illegible] sa solidité sera à celle du [illegible] que l'on peut démontrer d'ailleurs directement.

[illegible] variété de fer sulfuré (fig. 76) [illegible] d'un décroissement analogue à [illegible] commence au dodécaèdre à faces [illegible] on a lieu par quatre rangées en [illegible] et par quatre rangées en hauteur. Dans les cristaux observés [illegible] n'atteint pas sa limite, de [illegible] sur la surface du cristal secondaire [illegible] parallèles aux faces du noyau, [illegible] données par les décroissements [illegible]. La face h^4 située à la droite [illegible] résulter du décroissement par [illegible], si dans le triangle Thg [illegible], on trouve que l'angle Tgh [illegible] il suit que l'angle gTh est [illegible] $165^d 5' 49''$ pour l'incidence [illegible], et $104^d 2' 11''$ pour celle [illegible]

[illegible] maintenant le prisme droit rectangulaire (fig. 77), dans lequel le

rapport des côtés CD, CB, CG est celui des nombres $\sqrt{6}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}$, et qui est la forme primitive de la cymophane. Les côtés dont il s'agit étant dans trois cas différens, si l'un quelconque d'entre eux, tel que CB, sert de ligne de départ à un décroissement, il n'est pas nécessaire que les deux autres en subissent un semblable, et il peut même arriver que ceux-ci restent libres; il faudra seulement que le même décroissement se répète sur les trois bords AD, FN, GL qui sont identiques au premier.

C'est ce que l'on observe dans la variété de cymophane représentée (fig. 78), et que je nomme *anamorphique*. L'effet du décroissement, qui a lieu par une seule rangée sur les quatre bords désignés, est de produire au-dessus de chaque base, telle que ABCD (fig. 77), un prisme triangulaire BCOKAD (fig. 78), appliqué par un de ses pans sur cette base, et dont les deux autres pans BCOK, ADOK sont la somme des bords décroissans sur les lames de superposition. Il est facile de voir que dans le triangle mensurateur *abc* (fig. 79), qui se rapporte ici à la face BCOK (fig. 78), le côté horizontal *ab* (fig. 79), est au côté vertical *ac* comme CD est à DF ou CG, c'est-à-dire comme $\sqrt{6} : \sqrt{2}$, ou comme $\sqrt{3} : 1$, d'où il suit que l'angle *cba* (fig. 79) $= 30^{d}$. Ainsi l'incidence de BCOK (fig. 78) sur BCGL sera de 120^{d}. J'appelle cette variété *anamorphique*, parce que si on lui faisait prendre la position en apparence la plus naturelle d'après son aspect extérieur, qui est celle

d'un prisme hexaèdre, la base M étant alors située horizontalement, la forme primitive se trouverait comme renversée.

76. Dans toutes les variétés que nous avons considérées jusqu'ici, les lames de superposition décroissent de tous les côtés à la fois, ou si elles ne décroissent que vers deux de leurs bords, comme dans la cymophane anamorphique (fig. 78), les autres bords ne font autre chose que se mettre de niveau entre eux, en restant sur le prolongement des faces M du noyau. Mais il existe des variétés dans lesquelles certains bords, sans être soumis à aucun décroissement, subissent des variations qui secondent les effets des décroissemens relatifs à d'autres bords, et concourent avec ceux-ci vers le but de la cristallisation. Nous allons en citer quelques exemples.

Reprenons le dodécaèdre à triangles scalènes (fig. 80) que j'ai déjà cité comme ayant pour noyau le rhomboïde primitif de la chaux carbonatée, et qui est situé de manière que les petits côtés EO, OI, IK, etc., de ses faces triangulaires se confondent avec les bords inférieurs de ce rhomboïde; d'où l'on voit qu'il résulte d'un décroissement dont l'effet se répète des deux côtés de chacun des mêmes bords, tandis que les bords supérieurs AE, AI, etc., ou A'H, A'K, etc., sont libres de tout décroissement. Or, en même temps que les lames de superposition diminuent vers les premiers bords, elles s'alongent vers les seconds, de manière à envelopper les parties du noyau adja-

centes aux sommets A, A′; c'est-à-dire que la cristallisation agit à l'égard de ces mêmes parties comme elle ferait dans le cas où le décroissement étant nul, le noyau s'accroîtrait dans tous les sens, en conservant sa forme.

77. Il suit de là que la mesure des décroissemens ne se détermine pas d'après les différences entre les lames de superposition considérées dans toute leur étendue, mais seulement d'après les quantités dont elles se dépassent mutuellement vers les parties qui sont soumises à ces décroissemens. Tout le reste est censé être compris tacitement dans la solution des problèmes. La théorie n'a même besoin que de considérer ce qui se passe à l'origine de chaque décroissement, parce que la première lame de superposition étant donnée, on a un triangle mensurateur qui sert à déterminer la position du plan produit par le décroissement. Cependant il n'est pas indifférent de pouvoir se rendre compte à soi-même de tous les détails relatifs à la structure d'un cristal, de manière que si l'on avait à sa disposition un certain nombre de petits solides semblables aux molécules soustractives, on pût les arranger comme par assises autour d'un noyau donné, dans un ordre conforme à celui de la nature, et produire ainsi une imitation artificielle du travail de la cristallisation. Je vais en conséquence faire en quelque sorte l'analyse d'une structure analogue à celle qui nous occupe ici, en ayant égard à toutes les variations particulières, à

la théorie prouve que le décroisseme
a lieu par deux rangées. La figure 8
pèce de pyramide qui s'est formé
sommet supérieur du noyau, lequel
en partie à découvert, permet de s
ment la marche de la structure.

Si l'on suit l'ordre des lames de s
s'appliquent trois à trois les unes su
partant des faces du noyau, on vo
premières, par exemple, au lieu de
vers leurs parties supérieures, avec
centes du noyau, s'étendent vers ces
par l'addition d'une rangée de molécu
commune à deux lames. Les trois l
non-seulement s'étendent pour recouv
additionnelle, mais prennent un accro
rieur, par l'addition d'une nouvelle
de même commune à deux d'entre el
tribution, qui se répète dans toute la
pyramide, est nécessaire, pour éviter

comme formant une couche composée de petits rhomboïdes semblables au noyau. Ainsi la dernière couche qui répond au sommet *s* (fig. 80), a pour élémens sept petits rhomboïdes. C'est une suite de ce que sa partie concave, dans laquelle est emboîtée la couche suivante, a une capacité égale à un seul rhomboïde, en sorte que l'ensemble de cette capacité et de la couche forme un rhomboïde total qui est le plus petit possible, parmi tous ceux qui sont des assemblages de rhomboïdes élémentaires, puisque son côté est seulement égal à deux arêtes de molécule. Le même raisonnement s'applique à toutes les autres couches, dont chacune, considérée en elle-même, n'est autre chose qu'un rhomboïde évidé à l'endroit par lequel elle s'applique sur la couche inférieure.

79. Il est facile de déterminer le nombre de rhomboïdes élémentaires qui composent une couche d'un rang donné. Ce nombre étant constant relativement à la couche terminale, que nous supposons appartenir au *minimum* des rhomboïdes composés de rhomboïdes simples, nous allons d'abord renverser l'ordre, en prenant la couche dont il s'agit pour la première. Cela posé, je remarque que chaque couche peut être considérée, ainsi que je l'ai déjà dit, comme un rhomboïde dont on aurait retranché un autre rhomboïde plus petit, à l'endroit où cette couche s'applique par sa concavité sur la convexité de la couche suivante. Soit x le côté du premier rhomboïde. Comme chaque couche n'a que l'épaisseur d'une molécule, il est fa-

cile de voir que $x-1$ désignera le côté du second rhomboïde, ou de celui auquel répond la concavité de la couche dont il s'agit. Donc le côté du rhomboïde auquel répond la partie cachée de la couche suivante sera aussi $x-1$; mais, à cause du décroissement par deux rangées, le côté du rhomboïde auquel appartient cette dernière couche, considérée dans sa totalité, est plus grand de deux unités que celui du rhomboïde relatif à la partie cachée : donc son expression sera $x-1+2$, ou $x+1$. Mais x est le côté du rhomboïde auquel répond la couche précédente ; donc les côtés des rhomboïdes auxquels appartiennent les différentes couches, prises en partant du sommet, forment une progression arithmétique croissante, dans laquelle la différence entre deux termes consécutifs est l'unité. Donc puisque le côté du rhomboïde relatif à la première de toutes les couches est 2, la série des différens côtés sera 2, 3, 4, 5, 6, etc., dans laquelle désignant par x un terme quelconque, et par n le rang de ce terme, on aura

$$x=n+1.$$

Maintenant, si de la solidité x^3 du rhomboïde auquel appartient la couche du rang n, on retranche la solidité $(x-1)^3$ du rhomboïde qui répond à la concavité de cette couche, on aura $3x^2-3x+1$, pour l'expression du nombre de rhomboïdes compris dans cette même couche ; et si dans cette expression on met à la place de x sa valeur $n+1$, elle

devient

$$3n^2+3n+1.$$

80. Prenons maintenant la couche qui recouvre immédiatement le noyau pour la première : soit C le nombre d'arêtes de molécules contenues dans le côté de ce noyau, N le rang d'un terme quelconque, et soit toujours x le côté du rhomboïde auquel appartient la couche de ce rang. Si $x=C-1$, comme dans la première couche, on a $N=1$. Si $x=C-2$, on a $N=2$, etc. Donc, en général, $x=C-N$. Mais nous avons eu $x=n+1$; donc $n=C-N-1$. Si l'on substitue cette expression de n dans la formule $3n^2+3n+1$, on trouve $3(C-N)^2+3(N-C)+1$.

Supposons, par exemple, que l'on demande le nombre de rhomboïdes que contient la sixième des couches prises de bas en haut, dans un solide représentatif semblable à celui de la fig. 77. On aura $C=10$, $N=6$; ce qui donne, pour le nombre cherché, $3(4)^2+3(6-10)+1=37$. En doublant ce nombre, on aura 74 pour celui des rhomboïdes compris dans l'ensemble des deux couches qui se correspondent vers les deux sommets du noyau.

La même couche étant la troisième en partant du sommet, si l'on fait $n=3$, dans la formule $3n^2+3n+1$, on trouvera de même 37 pour le nombre de rhomboïdes que contient cette couche.

On peut présumer avec beaucoup de vraisemblance que la formule $3n^2+3n+1$, appliquée aux différens termes d'une suite dans laquelle x est égale successi-

vement à 2, 3, 4, 5, 6, etc., représente les solidités des couches de superposition, prises depuis le sommet, dans tous les dodécaèdres analogues à celui que nous considérons ici. Toute la différence consistera en ce que, dans ceux qui sont d'un plus gros volume, le nombre des termes de la progression sera plus considérable. Mais deux progressions quelconques auront toujours une partie commune.

81. Proposons-nous maintenant de déterminer le nombre de tous les petits rhomboïdes qui composent le dodécaèdre dont il s'agit, en supposant que l'on connaisse le nombre C d'arêtes comprises dans le côté du noyau.

La formule $3n^2+3n+1$, qui exprime le nombre de petits rhomboïdes compris dans une couche du rang n, fait voir que la somme de ceux que renferment toutes les couches superposées à un même sommet du noyau est égale à trois fois la somme des carrés des nombres naturels 1, 2, 3, 4, etc., en comptant n pour le dernier; plus, à trois fois la somme des mêmes nombres; plus, au nombre désigné par n.

Or, d'après les formules démontrées à la page (77), on a

$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2},$$

et $$1+2^3+3^3+4^3+5^3+\ldots+n^3=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{(2n+1)}{3}.$$

Donc la somme de tous les petits rhomboïdes compris dans les couches superposées à un même sommet du noyau sera, en général,

$$3\left\{\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{2n+1}{3}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}+n,$$

ou

$$3.\ \frac{n(n+1)}{2}\left\{\frac{2n+1}{3}+1\right\}+n=3\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+4}{3}\right)+n$$
$$=n(n+1)(n+2)+n;$$

mais à cause du décroissement par deux rangées $n=C-2$. Si l'on substitue cette valeur de n dans la formule, elle deviendra

$$C(C-1)(C-2)+C-2=(C-2)(C^2-C+1)$$
$$=C^3-3C^2+3C-2.$$

Or la somme S de tous les petits rhomboïdes dont le dodécaèdre est l'assemblage, est égale à C^3 plus au double de la quantité précédente ; donc

$$S=3C^3-6C^2+6C-4=3(C^3-2C^2+2C)-4.$$

Supposons $C=10$, comme dans la figure; on aura

$$S=3000-600+60-4=2456.$$

82. La formule précédente se rapporte au cas où le sommet du dodécaèdre est supposé au point s' (fig. 81), que l'on peut considérer comme le sommet physique du dodécaèdre, dont le sommet géométrique est en s. Or, plus le nombre C augmente, plus le point s se rapproche du point s', et si l'on sup-

pose C infini, les deux sommets coïncideront en un même point; dans ce cas, les quantités $6C^2$, $6C$ et 4 s'évanouissent, et l'on a $S=3C^3$. Effectivement, on prouve par un calcul direct, ainsi que nous le verrons dans la suite, que si l'on considère la surface du dodécaèdre comme composée des plans tangens à tous les bords inférieurs des lames de superposition, ou, ce qui revient au même, si l'on considère le dodécaèdre comme un corps géométrique, sa solidité est triple de celle du noyau. A la rigueur, C n'est jamais infini dans la nature; mais il est si grand, à raison de l'extrême petitesse des molécules, que la distance entre s et s' peut être considérée comme nulle.

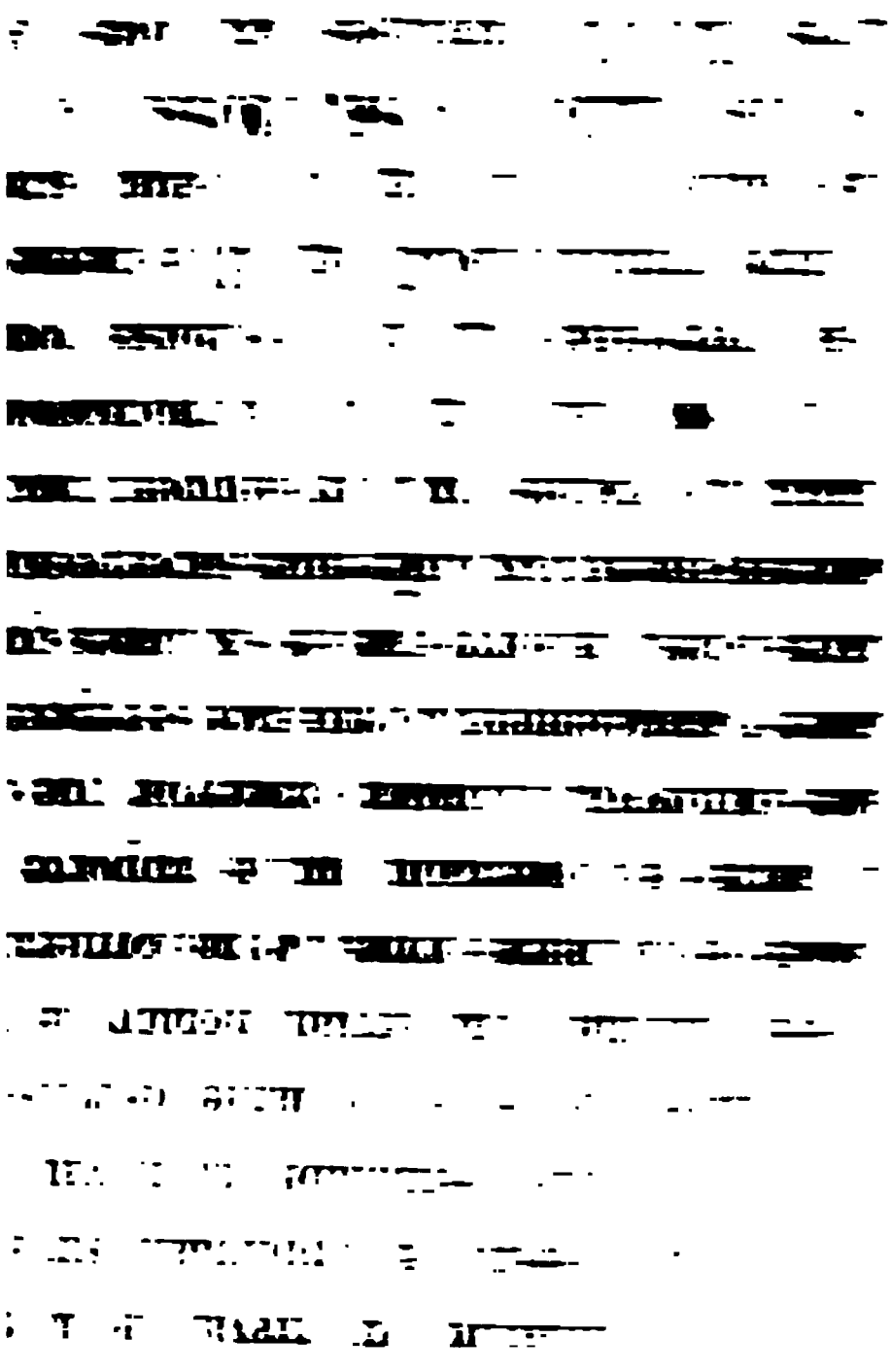
Je reviendrai dans la suite sur la même variété, dont je déterminerai les angles d'après les formules générales relatives au rhomboïde. Je ferai connaître en même temps plusieurs propriétés remarquables dont elle jouit.

83. Je vais citer un nouvel exemple que je tirerai encore de la chaux carbonatée, en continuant de prendre pour noyau le rhomboïde de $104^d\frac{1}{2}$, que je suppose ici représenté par ABGA'HD (fig. 82).

Concevons un décroissement par une simple rangée sur les bords supérieurs AB, AD, AF, etc. Il produira de part et d'autre de chacun de ces bords deux faces qui seront de niveau, comme celles qui se forment des deux côtés d'un même bord dans le dodécaèdre originaire du cube (fig. 70); en sorte que le

nombre des faces réellement distinctes du solide secondaire sera de six, c'est-à-dire qu'il sera égal à celui des bords qui servent de ligne de départ aux décroissemens, et il est facile de voir que les trois faces qui naissent, par exemple, autour du sommet supérieur, savoir, ALMO, ARSO, ALNR (fig. 82), étant situées en sens contraire de celles qui appartiennent au sommet inférieur, savoir, A′SRN, A′MLN, A′MSO, le solide secondaire sera un rhomboïde beaucoup plus obtus que le noyau, dans lequel les petites diagonales des rhombes coïncideront avec les bords supérieurs de ce noyau, et dont les angles solides seront situés au milieu de ses faces. Car les deux rhomboïdes ayant le même axe, si l'on conçoit un plan mené par les trois points L, O, R, il passera nécessairement par les trois diagonales horizontales supérieures des deux rhomboïdes, et par conséquent il passera par les angles solides B, D, F, du rhomboïde primitif, d'où il suit que ces points sont situés au milieu des diagonales menées de L en O, de O en R, et de R en F, c'est-à-dire qu'ils coïncident avec les milieux des faces du rhomboïde secondaire.

Les mêmes rhombes seront chargés de cannelures produites par les saillies et les rentrées alternatives des bords des lames décroissantes, et situées parallèlement aux petites diagonales, comme dans le dodécaèdre (fig. 70) qui nous a déjà servi de terme de comparaison. Les lames dont il s'agit subissent encore ici, dans les parties que le décroissement n'atteint



CXOU, les trapèzes ABXO, ADUO, et les triangles BCX, DCU, sera le sixième de la matière qui enveloppe le noyau, ou ce qui revient au même, il sera l'assemblage des lames de superposition empilées sur la face ABCD du noyau. Il s'agit donc d'analyser ce solide pour arriver au résultat proposé.

Soit *ac* (fig. 84) ce même solide. Par les points *x*, *u*, menons le plan *xpu* parallèle au rhombe *abcd*. Toutes les lames de superposition situées entre l'un et l'autre auront des figures pentagonales telles que *efghie*, et toutes celles qui sont comprises entre *xpu* et le point *o* auront des figures triangulaires. De plus, le point *x* (fig. 84), ou X (fig. 83), étant situé à la moitié du côté OM, il est évident que le point *p* (fig. 84), divise en deux parties égales le côté *ao* qui est tangent à tous les angles supérieurs des lames de superposition. Il suit de là qu'il y a autant de ces lames situées entre le triangle *xpu* et le rhombe *abcd*, qu'entre le même triangle et le point *o*; d'où nous conclurons que le nombre total des lames de superposition doit être pair. Par une suite nécessaire le côté AB du noyau doit être composé d'un nombre impair d'arêtes de molécule, puisque ce nombre excède d'une unité celui des lames de superposition, à cause du décroissement par une rangée. Nous supposerons ici que ce nombre soit égal à 9.

85. Maintenant, pour concevoir comment les diverses lames pentagonales et triangulaires dont le solide *ac* est l'assemblage, sont uniquement compo-

abea est le même que figure 84. Le pent
(fig. 85) est la projection de la première l
perposition qui est aussi indiquée (fig. 84,
ef, *ei* (fig. 85) sont dans le sens du déc
qui seul suffit pour déterminer la forme
Les deux rangées situées le long des bo
sont destinées à envelopper les parties
dantes du noyau, pour éviter les angle
Chacune de ces rangées étant commune à
représente la figure et à celle qui est appli
face primitive adjacente, on voit que dan
l'on voudrait construire une imitation ar
rhomboïde secondaire, il ne serait pas néc
jouter nne semblable rangée à la seconde
je viens de parler. La base *gh* du pentagon
posée d'angles alternativement rentrans
C'est ce que l'on concevra, en faisant att
cette base étant parallèle à la diagonale *us*
et les bords des lames décroissantes étant
l'autre diagonale *co* située sur le prolon

anguleuse assortie à l'effet du décroissement sur la surface dont elle fait partie.

Dans les trois projections suivantes *lmnσk*, *rstzv*, *yxuγδ*, il y a de même addition de deux rangées vers les bords *lm*, *σn*, *rs*, *zt*, *yx*, *γu*, pour remplir le vide que laisseraient entre elles les parties correspondantes, si cette addition n'avait pas lieu. Mais le nombre des rhomboïdes ajoutés décroît d'une lame à l'autre, en sorte que sur la dernière il n'y en a plus qu'un seul, indiqué par *yx* ou *γu*. Au-delà de ce terme, qui répond au plan *xpu* (fig. 84), les projections cessent de s'accroître par leurs bords latéraux, en sorte qu'elles se réduisent aux assortimens compris dans les espaces *εstλp* (fig. 85), *ζmnπμ*, *ϑghφν*, et la dernière se réduit à un rhombe *cω*, qui indique le rhomboïde situé à l'angle *o* (fig. 84). Dans la réalité, ces espaces sont des pentagones dont les côtés latéraux sont égaux chacun à une arête *εs*, *ζm*, *ϑg*, de molécule. Mais à cause de l'extrême ténuité des molécules, ces côtés sont censés infiniment petits, en sorte que les pentagones se présentent sous l'aspect de triangles isocèles.

86. Dans le cas présent, les nombres de rhomboïdes qui composent les couches successives composées chacune de six lames de superposition, forment deux séries dont chacune suit une loi particulière. La première répond aux couches situées entre le triangle *xpu* (fig. 84) et le rhombe *abcd*, et la seconde aux couches comprises depuis le même triangle jusqu'au

étant égaux dans les
de molécule com-
un noyau étant égal à la
à l'unité, il suffira de
nombre pour savoir à quelle
d'un rang donné, et
dont elle est com-
nant la formule relative à la

les termes, N + 1 sera celui
comprises dans chaque côté
fig. 84) étant la somme
(fig. 85), et la ligne *ao*
étant la somme des points *a*,
Il est évident que chacun des
etc., des lames de superpo-
à la première série, est égal au
Donc on peut considérer
efghi. klmns (fig. 85), comme
un noyau, dont on aurait re-
dans la partie inférieure. Soit *s* en
lames de molécule comprises dans
dont se compose l'un quel-
on aura $x=(N+1)^3-s$.
à chaque pentagone, tel
la différence entre le nombre
comprises dans le rhombe
le triangle *mnn* (fig. 85 et 86)
le nombre de facettes comprises dans

ce même triangle. Soit C le nombre d'arêtes de molécule contenues dans le côté soit du rhombe, soit du triangle. s sera égal au triangle inférieur $m\psi n$, plus à la somme des petits triangles $m\vartheta g$, $g\tau e$, etc., situés au-dessus de la diagonale mn. Or, l'expression du triangle inférieur est $\frac{C^2}{2}$; et parce que le nombre de diagonales de molécule comprises dans la diagonale mn est égal à celui d'arêtes de molécule contenues dans le côté $m\nu$, la somme des petits triangles $m\vartheta g$, $g\tau c$, etc., sera $\frac{C}{2}$. On peut appliquer le même raisonnement à tout autre pentagone. Donc, en général,

$s = \frac{1}{2}(C^2+C)$. Donc, $x = (N+1)^2 - \frac{1}{2}(C^2+C)$.

Maintenant soit n' le rang d'un terme quelconque, dans la série prise en partant du noyau, la quantité G est successivement $g\omega$, $m\nu$, $s\mu$, etc., c'est-à-dire 2, 4, 6, etc., ou en général $2n'$. Donc, substituant $2n'$ à la place de C, on aura $x = (N+1)^2 - 2n'^2 - n'$.

Or, chaque couche étant composée de six lames, on aurait son expression en multipliant la précédente par 6, si chaque lame n'avait pas de rangée commune avec les lames adjacentes. Il faudra donc déduire de l'expression précédente multipliée par 6 la moitié de la somme des petits rhomboïdes contenus dans les rangées communes. Mais ces rangées ont successivement pour côtés les lignes fg, lm, rs, etc., dont la première renferme deux arêtes de molécule de moins

conque, en partant des faces du noyau, nous aurons en général $n = N - n' + 1$, et l'expression $2n^2 - n$ deviendra $2(N-n'+1)^2 - N + n' - 1$, qui se réduit à $2(N-n')^2 + 3(N-n') + 1$. Donc chaque terme de la deuxième série sera représenté par

$$6[2(N-n')^2 + 3(N-n') + 1].$$

88. Supposons que l'on demande le nombre x de rhomboïdes contenus dans la troisième couche, le côté du noyau étant égal à 9, comme dans la fig. 85; en prenant la formule relative à la première série, on aura

$$x = 6(N^2 + N - 2n'^2 + n') = 6(64 + 8 - 18 + 3) = 342.$$

Si x appartient à la deuxième série, et que le terme que l'on cherche soit, par exemple, le sixième, on aura, en employant la formule relative à cette série,

$$= 6[2(N-n')^2 + 3(N-n') + 1] = 6[2(8-6)^2 + 3(8-6) + 1] = 90.$$

89. Je terminerai cet article par la solution d'un problème analogue à celui dont nous nous sommes occupés à l'occasion du dodécaèdre métastatique, et qui aura pour but de déterminer généralement le nombre de rhomboïdes élémentaires contenus dans un rhomboïde produit par la loi de décroissement que nous venons de considérer, en prenant pour donnée le nombre d'arêtes de rhomboïdes élémentaires compris dans le côté du noyau.

Nous prendrons ici la série des lames de superpo-

M. S, etc. (fig. 82), [illegible] dans le sens où elle est ordonnée, nous la supposerons comme ci-dessus, partagée en tant parties d'un égal nombre de termes.

[illegible] nombre de petits rhomboides [illegible] entre le point o (fig. 84) et le point p, en nous servant de ce qui a lieu par rapport à une telle base du triangle. Nous avons vu [illegible] l'expression d'un terme quelconque de cette série était $n^2 - n$. Donc la somme de tous les termes est égale à tout [illegible] la somme des nombres naturels, en prenant autant de ces nombres que la série contient de termes, moins la somme des nombres simples. Or, si l'on représente par n le nombre des termes, on a, d'après les formules de la page [illegible],

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6},$$

et

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Par conséquent la somme des termes de la première série sera

$$\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{3} - \frac{n^2 + n}{2} = \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6}.$$

Mais, $n = \frac{C - 1}{2}$; substituant à la place de n cette valeur, nous aurons $\frac{2C^3 - 3C^2 - 2C + 3}{24}$. Donc la tota-

lité des six séries relatives aux six faces du noyau aura pour expression $\frac{2C^3-3C^2-2C+3}{4}$.

90. Passons à la série suivante, et supposons d'abord que chaque lame de superposition n'ait pas de rangée commune avec les lames adjacentes. Dans cette hypothèse, l'expression d'un terme quelconque du rang n', en partant du noyau, est $(N+1)^2-2n'^2-n'$ (page 105). Soit n'' le rang du terme qui répond à n', en allant au contraire vers le noyau; nous aurons

$$n'=\tfrac{1}{2}N-n''+1.$$

Donc

$$n'^2=\tfrac{1}{4}N^2-Nn''+N+n''^2-2n''+1.$$

Si l'on substitue cette valeur et celle de n' dans l'expression d'un terme quelconque, et qu'en même temps on réduise, on trouvera, en donnant un même dénominateur à tous les termes,

$$\frac{N^2-N+4Nn''-4n''^2+10n''-4}{2}=(2N+5)n''-2n''^2+\frac{N^2-N-4}{2}.$$

Donc la somme des petits rhomboïdes compris dans la série dont il s'agit ici, est composée du produit de $(2N+5)$ par la somme des nombres naturels, en prenant autant de ces nombres que la série renferme de termes, moins deux fois la somme des carrés des mêmes nombres, plus la quantité $\frac{N^2-N-4}{2}$ prise autant de fois qu'il y a de termes dans la série, c'est-

[redacted]

[redacted]

[redacted]

Retranchant cette quantité de

$$\frac{10C^3-15C^2+2C+3}{4},$$

on aura pour le nombre de rhomboïdes élémentaires compris dans la seconde série,

$$\frac{10C^3-21C^2+14C-3}{4};$$

ajoutant l'expression de la première série, ou

$$\frac{2C^3-3C^2-2+C3}{4},$$

plus la valeur C^3 du noyau, on trouve que le nombre de tous les petits rhomboïdes que renferme le rhomboïde secondaire est $4C^3-6C^2+3C$.

91. Supposons $C=9$, comme dans la figure, le nombre des rhomboïdes élémentaires sera égal à 2457.

Si l'on fait C infini, auquel cas C^2 et C s'évanouissent devant C^3, la solidité du rhomboïde secondaire sera quadruple de celle du noyau, ce que démontre également le calcul, lorsque l'on considère le rhomboïde secondaire comme corps géométrique.

Décroissemens sur les angles et décroissemens intermédiaires.

92. Nous allons maintenant nous occuper des décroissemens sur les angles; mais après avoir donné quelques notions générales relatives à la marche de ces décroissemens, je réunirai avec eux, sous un

lire

(aN-

n dés-

Subs

aur

(aC-

don

du

rang

tran

et m

nous

c'est-

fois la

tant d

moins

cules dont o, p, m, d, représentent les bases. Il est visible que la nouvelle facette latérale que le décroissement fera naître sur la première lame de superposition, par la soustraction de la molécule a, ne sera réellement composée que des deux arêtes $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ (fig. 88); que la facette qui correspondra à la précédente sur la seconde lame, sera l'assemblage des trois arêtes $\epsilon\epsilon'$, ee', $\zeta\zeta'$, et ainsi de suite.

93. De plus, il est facile de concevoir que la face produite par le décroissement ne sera plus simplement sillonnée par des espèces de cannelures, comme dans les décroissemens sur les bords; mais elle sera hérissée de pointes γ, δ, ϵ, e, ζ, etc., qui, étant toutes de niveau, et échappant à l'œil par leur petitesse, s'offriront sous l'aspect d'une surface continue.

Une nouvelle différence qui existe entre les décroissemens sur les angles et ceux que subissent les bords, consiste en ce que ceux-ci, en supposant qu'ils agissent sur les quatre bords des lames de superposition, emportent ces bords tout entiers, au lieu que les décroissemens sur les angles, en même temps qu'ils font naître de nouveaux bords tournés vers ces mêmes angles, laissent subsister, au moins jusqu'à un certain terme, des portions des bords primitifs.

94. Il suit de là que les grandes faces des lames de superposition dont la figure 87 représente les projections, sont d'abord des octogones $\gamma\delta rq\tau\gamma' l' m'$, $\epsilon\zeta\vartheta\lambda k' f' s' e'$, etc., dans lesquels les nouveaux bords $\gamma\delta$,

même point de
diaires, à cause
les uns et les autr
Soit ABCD (
mitif que nous
métrique, sou
carrés, qui s
molécules so
empilées sur
quatre angl
rangée de
carré AB
ment sur
posant q
carré. (
se passe
que les
il est
sition
dimin
que la
les d
aura
signe
sent
cule
(fig.
par

que les résis-
au contraire
représente la
molécule dont se
AD, est impair,
par n'être plus
que $\pi\xi$; et cette
antité infiniment pe-
etc., les grandes
qui s'appliquent les
terme, sont censées
leur elles soient des
vont en diminuant
en sorte que la surface
représentée par l'octo-
rrespond à cinq molé-
la dernière lame est un
que cette même lame se
ame.
me droit symétrique
mitive, et qui subisse
es un décroissement
celui dont nous venons
produites par le décrois-
que la somme des angles
ξ, $\mu\nu$, etc., sont
e que les faces dont il
que des largeurs infi-
, etc., iront en s'élargissant

au terme qui répond à la ligne $\lambda\xi$, et aux autres semblablement situées, et que, passé ce terme, elles se rétréciront progressivement jusqu'à ce qu'elles soient réduites à de simples points; et parce que les bords fg, vu, situés au-delà de $\lambda\xi$, diminuent dans le rapport inverse de celui qui détermine l'accroissement des bords $\gamma\delta$, $\epsilon\zeta$, $\mu\nu$, etc., situés en-deçà de la même ligne, les faces produites par le décroissement seront nécessairement des rhombes.

Le résultat précédent conduit à un dodécaèdre représenté (fig. 90), dont la surface est composée de quatre hexagones verticaux DPCGRF, BHCGUL, etc., qui répondent aux faces latérales de la forme primitive, et de huit rhombes SPCH, SPDM, etc., disposés quatre à quatre autour des sommets. Ces rhombes sont produits immédiatement par le décroissement, ainsi que je l'ai expliqué plus haut, et les triangles DPC, CHB, etc., qui terminent les hexagones, sont les sommes des portions des bords primitifs que le décroissement n'atteint pas. Si l'on fait passer un plan MPHK par les diagonales horizontales des rhombes situés vers l'un quelconque des sommets, ce plan répondra à l'octogone $\lambda\xi\pi\rho\tau\eta\psi\omega$ (fig. 87), qui, comme je l'ai dit, est censé être un carré. Tous les autres plans menés entre PH et le point C, parallèlement à MPHK, répondront successivement aux octogones situés entre $\lambda\xi$ (fig. 87) et le point D, et tous les plans menés entre PH (fig. 86) et le sommet S, répondront aux octogones situés entre $\lambda\xi$ (fig. 87) et

[illegible] peuvent être considérés comm[illegible]

[illegible]maintenant passer à la manière de con[illegible] mensurateurs relatifs aux décrois[illegible] et ce que je dirai sur ce suje[illegible] aux décroissemens interm[illegible] comme je l'ai déjà dit, sont étroitemen[illegible] qui ont lieu parallèlement aux di[illegible]

[illegible] un parallélépipède quelconque [illegible] de forme primitive, et dont les [illegible] sur leurs quatre angles un décrois- [illegible] supposerons d'abord avoir lieu [illegible] rangée, et dont nous nous bornerons [illegible] par rapport à l'angle D. Soit Dγ' [illegible] molécule intégrante; ayant pris sur DA [illegible] partie Dm égale à la dimension en lar- [illegible] molécule (fig. 91), et ayant pris sur DC [illegible] partie Dr égale à la dimension en lar- [illegible], menons *mn* et *rs* (fig. 89), paral- [illegible] égales à la dimension en hauteur δD [illegible] Les points D, *n*, *s* (fig. 89), étant les som- [illegible] angles solides désignés par les lettres D, γ, δ [illegible] le plan *n*Ds (fig. 89) qui passe par ces trois [illegible] le rudiment de la face produite par le [illegible]. Menons de plus le plan *nsrm*, qui [illegible] avec la nouvelle facette latérale que le [illegible] a fait naître sur la première lame de [illegible] La ligne Do, perpendiculaire sur *mr*

sera la base du triangle mensurateur; la ligne *oh* menée du point *o* sur le plan *nsrm*, perpendiculairement à *mr*, sera le côté intérieur du même triangle, et la ligne D*h* en sera le côté extérieur, d'où il suit que l'angle *h*D*o* donnera l'inclinaison de *n*D*s* sur la base ABCD de la forme primitive.

97. Si l'on suppose que le décroissement ait lieu successivement par deux, trois, quatre rangées en largeur, la base du triangle mensurateur, en conservant toujours la même direction, sera double, triple ou quadruple de D*o*, et si le décroissement est en même temps mixte, le côté intérieur du triangle mensurateur, en restant sur la direction *oh*, sera égal à autant de fois cette même ligne qu'il y aura de rangées soustraites en hauteur; c'est-à-dire que si l'on fait D*o* = *l*, *oh* = *h*, et si l'on désigne par *n* le nombre de rangées soustraites en largeur, et par *n'* celui de rangées soustraites en hauteur, la base du triangle mensurateur sera en général $n \times l$, et son côté intérieur sera $n' \times h$.

Si la base de la molécule est un carré ou un rhombe, la ligne D*o*, dans le cas d'un décroissement par une rangée, sera égale à la moitié de la diagonale qui va de D en ε ou de ϑ en ε' (fig. 91), et en général le nombre de diagonales qu'elle mesurera sera la moitié du nombre de rangées soustraites dans le sens de la largeur.

98. On voit ici une nouvelle différence entre les décroissemens sur les angles et ceux qui ont lieu sur

le co
des
96
strui
sem
s'ét
din
liés
gon
fai
bas
sen
pi
à
(fi
(b
g
(fi
ge
lèl
(fig
me
(fig
poi
dé
co
dé
sup

au lieu d'un dodécaèdre analogue à SY (fig. 90), le solide représenté figure 93, dont les faces obliques sont des pentagones surmontés de deux facettes carrées *pnir*, *utsx*, parallèles aux bases de la forme primitive.

Menons les diagonales AC, BD (fig. 89). Soit *cab* (fig. 94) le triangle mensurateur, dans lequel l'angle *b* sera droit, et *ab* sera à *bc* :: DS (fig. 89) : DF :: $\sqrt{8}$: 5, ce qui donne 29^{d} 30$'$ pour l'angle *acb*, et par conséquent 60^{d} 30$'$ pour l'angle *cab*. Donc l'incidence de chacun des pentagones C*lnpk*, D*hnie*, etc. (fig. 93), sur la face terminale, sera de 119^{d} 30$'$, et celle du même pentagone sur l'arête verticale adjacente CG ou DF, sera de 150^{d} 30$'$. Je donnerai, dans la partie analytique, les formules à l'aide desquelles on peut aussi déterminer les incidences mutuelles des pentagones adjacens.

Je donne le nom d'*apophyllite épointé* à la variété que je viens de décrire, et que j'avais d'abord placée, avec la même épithète, dans l'espèce de la mésotype. Il me fallait des cristaux d'une forme beaucoup plus nettement prononcée que ceux qui avaient servi à mes premières observations, pour rétablir l'exactitude dans la détermination des formes relatives à ces deux substances. Ceux qui m'ont offert cet avantage venaient les uns d'Utön en Suède, et les autres de Féroë.

Je suis redevable des premiers à M. Suedenstierna, directeur des mines, que je me félicite de compter

[redacted]

leçons pub
distingués
rapidité de
de M. Pet
d'ora
matériel
par lui-mêm
et pensé
[redacted]
[redacted]
[redacted]

l'arête DF la partie Dμ égale à mn ou à rs, menons $m\mu$ et $r\mu$. Les lignes mn, Dμ et rs étant égales et parallèles entre elles, il est évident que les deux plans nDs, $m\mu r$, sont aussi parallèles l'un à l'autre.

102. Supposons que le décroissement ayant lieu sur l'angle latéral ADF, Dm et Dμ représentent les nombres de dimensions en largeur soustraites sur les côtés DA, DF, et que Dr représente le nombre de dimensions en hauteur qui répond à celui des rangées soustraites dans le même sens. Des points m, μ, j'élève les lignes mt, μu, parallèles et égales à Dr, puis ayant mené tn, je fais passer un plan par les points tDu. D'après ce qui a été dit plus haut, ce plan est le rudiment de la face produite par le décroissement, et en appliquant ici le raisonnement que nous avons fait par rapport au plan nDs, on en conclura que les plans tDu, $mr\mu$, sont parallèles entre eux, comme les plans nDs, $m\mu r$. Donc les plans tDu, nDs, étant parallèles à un troisième plan $m\mu r$, et ayant un point commun D, se confondent sur un seul plan.

Supposons enfin que le décroissement ayant lieu sur l'autre angle latéral CDF, Dr et Dμ représentent les nombres de dimensions en largeur soustraites sur les côtés DC, DF, et que Dm représente le nombre de dimensions en hauteur qui détermine le nombre de rangées soustraites dans le même sens. On prouvera, à l'aide d'une construction semblable aux deux précédentes, que le plan πDZ, qui est le rudiment de

[redacted] ment, se confond sur [redacted] premiers plans *t*D*u*, *n*D*e*, [redacted] décroissemens qui agissent sur [redacted] se réunissent pour former [redacted] ent de telles mesures, que [redacted] qui représentent les nombres [redacted] soustraites sur les côtés, et [redacted] en hauteur soustraites dans [redacted] sont les mêmes pour tous les angles, [redacted] nt de changement que dans les [redacted] es lignes, les faces produites par les [redacted] coincideront sur un même plan.

[redacted] quelconque des trois décrois- [redacted] ent, il est facile de déterminer les [redacted]. On peut conclure encore de ce qui pré- [redacted] que si les décroissemens a lieu par une [redacted] les deux autres se feront aussi par [redacted] si un seul des décroissemens a lieu [redacted] mème en supposant qu'il soit [redacted] auxquels les lames de superposition sont [redacted] à une diagonale, et n'ont que l'épaisseur [redacted] les deux autres décroissemens seront [redacted] intermédiaires. Car en supposant que [redacted] celui qui subit le décroissement, on [redacted] chacune à deux dimensions en [redacted] tandis que Dμ sera égale à une [redacted] en hauteur. Maintenant, si l'on [redacted] décroissement qui a lieu par rapport à [redacted] les lignes Dn et Dμ représenteront les

nombres de dimensions en largeur sur les cotés DA, DF, et ces nombres étant inégaux, la ligne Dμ ne pourra être parallèle à la diagonale menée de A en F, et par conséquent le décroissement sera intermédiaire.

Ce qui se présente de plus naturel, dans ces sortes de cas, est de rapporter le résultat des trois décroissemens à celui qui est simple, et qui a lieu parallèlement à la diagonale, en supposant que les deux décroissemens intermédiaires n'interviennent que comme *auxiliaires*, pour prolonger l'effet du décroissement principal au-dessus des faces adjacentes à celles qui le subit. Je reviendrai bientôt sur ce sujet, dont le développement me fournira un nouvel exemple de la méthode synthétique, dont j'ai déjà fait usage pour décrire l'ordre de la structure dans les formes secondaires.

104. Passons à de nouvelles applications, et supposons d'abord que la forme primitive étant un cube OO′ (fig. 95), subisse des décroissemens par une simple rangée sur tous les angles de ses différentes faces. Nous nous bornerons, pour le présent, à considérer ce qui se passe par rapport aux trois angles plans réunis autour de l'angle solide O. Ayant pris sur les bords OE, OI, OO′, les parties O*c*, O*d*, O*r*, égales chacune à une arête de molécule cubique, menons les lignes *ct*, *dk*, parallèles à OO′, les lignes *cg*, *rs*, parallèles à OI, puis les lignes *dh*, *rz*, parallèles à OE, en donnant de même à chacune de ces lignes

une longueur égale à une arête de molécule. Si par le point O et par les extrémités des mêmes lignes prises deux à deux, nous faisons passer les plans *tok*, *gos*, *hoz*, il est facile de concevoir, d'après ce qui a été dit plus haut (pag. 122), que ces plans seront les rudimens des faces produites par les trois décroissemens qui agissent autour du point O, et qu'en même temps ils seront de niveau sur un plan unique. De plus, ces plans étant des triangles isocèles, égaux et semblables, et les angles *gct*, *kdh*, *srz*, compris entre eux, étant aussi égaux, il en résulte que si l'on prolonge leurs bases *gs*, *hz*, *tk*, elles se rencontreront de manière à former avec leurs prolongemens le contour d'un triangle équilatéral *uxy*. Enfin, les plans *gOs*, *tOk*, *hOz*, étant également inclinés sur les trois faces EOO'E', EOIA, IOO'I', au-dessus desquelles ils s'élèvent, il est visible que le triangle équilatéral *uxy* est perpendiculaire sur l'axe du cube qui passe par les points O, A'. Le même raisonnement s'applique aux résultats des décroissemens qui agissent autour des sept autres angles solides. Donc les faces du cristal secondaire n'étant autre chose que les triangles analogues à *uxy*, prolongés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent, et celles qui sont opposées deux à deux étant perpendiculaires sur l'axe du cube qui passe par les deux angles autour desquels elles se sont formées, la surface qui résultera de leur ensemble sera celle d'un octaèdre régulier *s*, *s'* (fig. 96). Le cube sera inscrit dans cet octaèdre, de manière

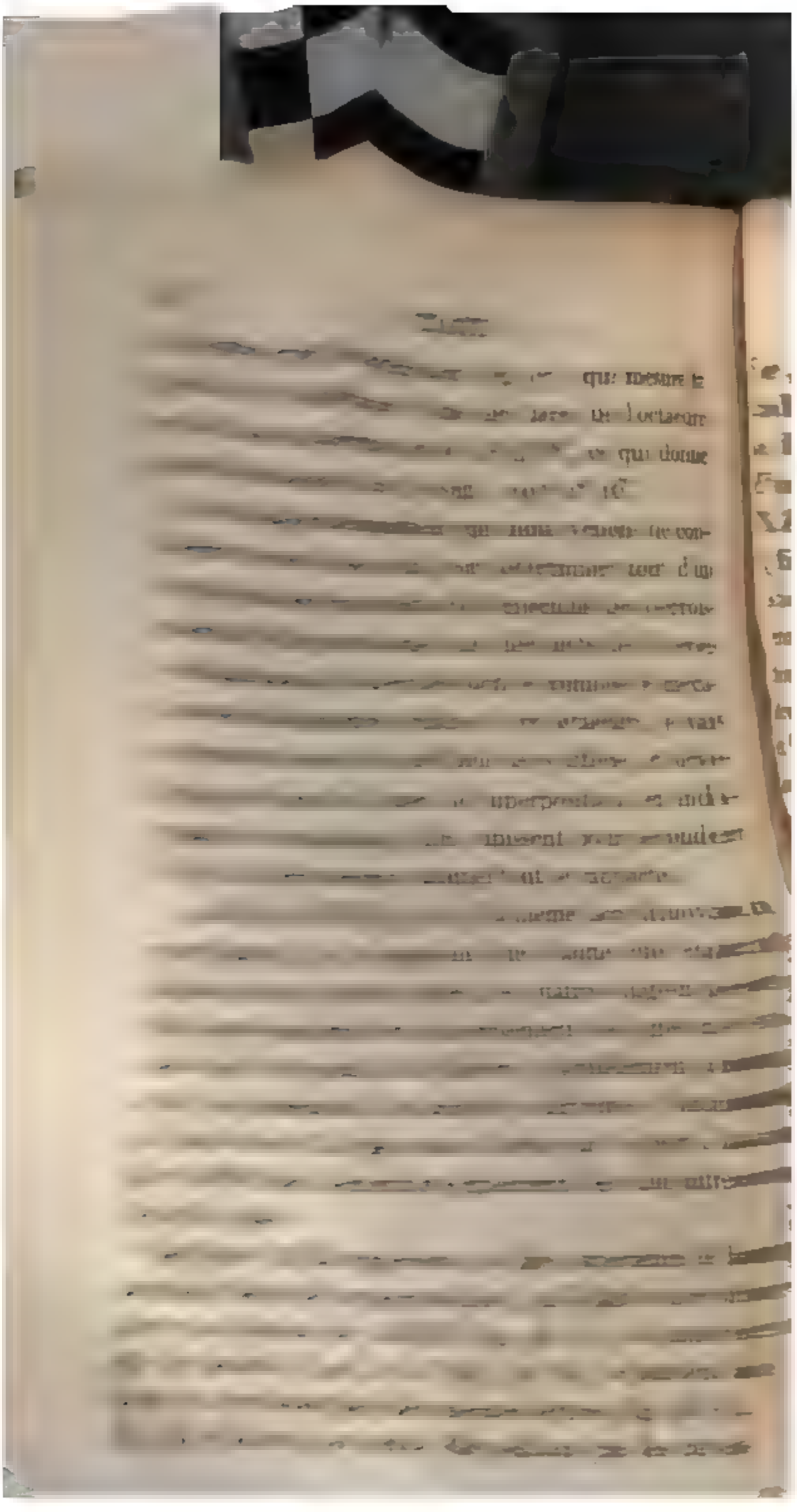
que ses angles solides coïncideront avec les milieux des faces du même octaèdre, et l'on voit, par la seule inspection de la figure, que ce dernier solide a ses faces tournées en sens contraire des triangles tels que *uxy*, qui en offrent les rudimens. Soit *omn* (fig. 97), le triangle mensurateur relatif à l'un quelconque des décroissemens, par exemple à celui qui a lieu sur l'angle EOI (fig. 95). La base *om* (fig. 97) sera égale à une demi-diagonale de molécule, et le côté intérieur *mn* à une arête, d'où il suit que l'on aura

$$om : mn :: 1 : \sqrt{2}.$$

Or, il est facile de voir que ce rapport est le même que celui qui existe entre la perpendiculaire menée du centre de la base de la pyramide *mnm'n's* (fig. 96) sur le côté *mn*, et la hauteur de la même pyramide. Donc si l'on représente ces deux lignes par 1 et $\sqrt{2}$, on aura $\sqrt{3}$ pour l'apothème du triangle *msn*, et parce que la perpendiculaire menée du centre de la base sur *mn* est égale à la moitié de ce même côté, l'expression de ce dernier sera 2. De plus, l'apothème du triangle *msn* étant $\sqrt{3}$, et la moitié du côté *mn* étant l'unité, on aura

$$ms, \text{ ou } ns = \sqrt{3} + 1 = 2,$$

d'où il suit que le triangle *msn* est équilatéral, et que le solide secondaire est un octaèdre régulier, comme on l'a déjà vu. D'après les données dont j'ai parlé,



Ee, A*a*, O*o*, I*i*, restent à vide, ce qui est l'effet initial de la loi de décroissement. On voit de plus, que la lame de superposition dont il s'agit est augmentée d'une rangée au-delà des portions des bords ST, RU, XZ, YM, qui répondent aux bords EA, EO, OI, IA (fig. 98 A), ce qui est nécessaire pour que le noyau s'accroisse à l'ordinaire dans les parties que le décroissement n'atteint pas. Chacune des rangées additionnelles PN, QV, GF, CL, étant commune aux deux lames qui s'appliquent l'une sur AEOI (fig. 95), et l'autre sur une des faces adjacentes, on se dispenserait de le répéter, si l'on voulait exécuter une imitation du solide dont il s'agit ici.

Ces mêmes rangées additionnelles font naître de nouveaux vides à côté de celui qui est l'effet immédiat du décroissement; ainsi, dans le cas où ces rangées n'existeraient pas, il n'y aurait vers l'angle O (fig. 98 A) qu'un seul vide U*o*'X (fig. B), produit par la soustraction de la molécule qui répond à O*o* (fig. A); mais l'addition des deux rangées PN, CL (fig. B), détermine entre les carrés *b*, *d*, d'une part, et *r*, *s*, de l'autre, deux nouveaux vides qui étendent l'effet du décroissement vers les parties adjacentes au point O (fig. A). Or, ces nouveaux vides sont censés résulter de la soustraction de deux cubes situés sur les prolongemens des rangées additionnelles PN, CL (fig. B), en sorte que chacun de ces vides est limité inférieurement par une facette de molécule, comme l'est le vide U*o*'X par la face O*o* (fig. A).

La figure 99 fera concevoir cette disposition. Soit **Oo** la molécule cubique située au point O (fig. 95 et 98 A), et soient *b*, *d*, *r*, *s* (fig. 99), les quatre molécules désignées par les mêmes lettres (fig. B). Soient de plus *b*, *l*, *t*, *u* (fig. 99), les molécules qui répondent aux précédentes dans la première lame de superposition appliquée sur la face EOO'E' (fig. 95), et soient *s*, *y*, *x*, *u* (fig. 99), celles qui leur répondent dans la lame appliquée sur la face OII'O' (fig. 95). Les vides qui existent l'un entre les molécules *d*, *r* (fig. 99), un autre entre les molécules *l*, *t*, et un troisième entre les molécules *y*, *x*, et qui sont l'effet immédiat du décroissement, résultent de la soustraction de trois cubes qui reposeraient sur les facettes **Oo**, **O***y*, **O***d*, or, tous les vides qui sont dus aux rangées additionnelles, se trouvent dans le même cas que les précédens par la manière dont ils sont limités : ainsi le vide qui existe entre les cubes *b* et *d*, est censé produit par la soustraction d'un cube qui reposerait sur la facette *o* de la molécule *l*. Il en est de même des autres vides, et tel est le mécanisme de la structure, considéré dans son ensemble, que les modifications accessoires au décroissement s'assimilent à celles qui en dérivent nécessairement.

La face supérieure de la seconde lame de décroissement est représentée par BKHD (fig. C), et sa position au-dessus de la précédente est indiquée par la correspondance des lettres *e''*, *a''*, *i''*, *o''*, et des let- (fig. B).

Cette lame dépasse la précédente, dans les parties que le décroissement n'atteint pas, d'une quantité qui serait égale à une rangée de cubes, si le noyau était composé d'un plus grand nombre de molécules, mais qui, dans le cas présent, se réduit à un simple cube désigné par B, K, H ou D.

Les grandes faces des lames de superposition qui jusqu'alors étaient des octogones tels que PQVGFCLN (fig. B), étant parvenues à la figure du carré BKHD (fig. C), décroissent, passé ce terme, dans toutes leurs dimensions, en sorte que leurs grandes faces sont successivement représentées par les figures D, E, F, G, H, I, où leurs positions respectives les unes au-dessus des autres se trouvent indiquées par la similitude des lettres c, f, g, h (fig. C), c', f', g', h' (fig. D), c'', f'', g'', h'' (fig. E), et ainsi des autres. On voit que la dernière lame se réduit à un simple cube désigné par z' (fig. I), et qui repose sur celui qu'indique z (fig. H).

La figure 100 représente une des faces de l'octaèdre produit par le décroissement, avec l'assortiment des molécules dont les angles extérieurs concourent à sa formation.

106. La série des lames empilées sur l'une quelconque des faces du cube (fig. 95), par exemple sur la face AEOI, diffère de celle des lames qui, dans le dodécaèdre représenté (fig. 90), correspondent à chacune des bases du noyau (fig. 89), en ce que ces dernières lames n'éprouvent d'autre variation que

rales CDFG, BCGL, etc., au lie
de bords correspondantes dans les
de l'octaèdre originaire du cube
recouvrant mutuellement, pour
se forme des angles rentrans aux
en résulte que la face produite p
croissemens qui ont lieu sur les angle
(fig. 95) n'est plus un rhombe, c
du dodécaèdre (fig. 90), mais u
que *orst* (fig. 96). Car, à cause des
nelles dont on a parlé, les bords qui
GV, CF, LN (fig. 98 B), augmente
grand rapport que si ces rangées n'
de plus l'existence de ces mêmes ra
terme où les lames de superpositio
décroître de tous les côtés à la fois;
triangle *rot* (fig. 96), qui est la s
croissans dont on a parlé, a moins
une base égale, que le triangle *rst*, q
des bords pris depuis le terme

tant à l'égard des sept autres angles solides, les vingt-quatre trapézoïdes qui naissent de l'ensemble des décroissemens donnent huit triangles équilatéraux, qui sont les faces du solide secondaire.

107. Les nombres de cubes renfermés dans les couches que forment les lames de superposition, en s'appliquant six à six les unes au-dessus des autres, donnent deux séries récurrentes, dont la première, en partant du noyau, contient toutes les lames qui ont vers leurs bords des rangées additionnelles, et la seconde toutes celles qui décroissent dans tous les sens à la fois.

Cherchons d'abord la valeur d'un terme quelconque dans la première série. Soit n le rang de ce terme, et c le nombre d'arêtes de molécules contenu dans le côté du noyau. Chaque lame recevant une rangée additionnelle vers chacun de ses bords opposés, il est évident que le côté de la première lame, en la complétant par la pensée, sera $c+2$, celui de la 2^e $c+4$, celui de la 3^e $c+6$, et en général $c+2n$. Or, il est aisé de voir que la première lame (fig. B) se trouve dans le même cas que si, ayant d'abord été complète, elle avait subi vers chacun de ses angles un décroissement par trois rangées, dont l'une est soustraite par l'effet immédiat du décroissement, et les deux autres proviennent des rangées additionnelles, ce qui donne pour la quantité de molécules soustraites vers chaque angle, $1+2+3$. Si la seconde lame (fig. C) était de niveau avec la première par ses bords analogues

à QV, PN, etc., l'effet du décroissement se bornerait à soustraire vers chacun de ses angles une rangée de plus que dans la précédente, ce qui ferait quatre rangées; mais l'extension qu'elle reçoit vers chacun de ses bords la met dans le même cas que si, ayant été d'abord complete, elle avait subi un décroissement de deux rangées de plus, ce qui donne pour la quantité de molécules soustraites vers chaque angle,

$$1+2+3+4+5+6.$$

En appliquant le même raisonnement aux autres lames, on en conclura que chacune ajoute à la progression donnée par la lame précédente trois nouveaux termes, dont l'un est le résultat immédiat du décroissement, et les deux autres proviennent des rangées additionnelles. Les nombres des termes, dans les progressions successives, étant 3, 6, 9, 12, etc., leur expression générale sera $3n$; et parce que dans chaque progression le premier terme et la différence entre un terme et l'autre sont l'unité, la somme des termes sera $\frac{9n^2+3n}{2}$. Donc, puisque le côté de chaque lame censée complète est $c+2n$, le nombre de rhombes contenu dans chaque lame, y compris les rangées qui lui sont communes avec celles qui s'appliquent sur les faces adjacentes, sera représenté par

$$(c+2n)^2-4\frac{(9n^2+3n)}{2} \text{ ou } (c+2n)^2-2(9n^2+3n).$$

Donc l'ensemble des six lames qui composeraient

une couche quelconque, dans l'hypothèse où il n'y aurait point de rangée commune, serait

$$6(c+2n)^2-12(9n^2+3n).$$

108. Remarquons maintenant que dans les décroissemens sur les angles, chaque rangée soustraite fait disparaître une arête de molécule sur l'un et l'autre des bords adjacens à l'angle qui subit le décroissement; et parce que chaque bord aboutit à deux angles, il perd autant de fois deux arêtes de molécule qu'il y a de rangées soustraites. Donc l'expression générale du bord, en supposant la lame complète, étant $c+2n$, et celle du nombre de rangées soustraites étant $3n$, le nombre de molécules qui restent sur la portion de chaque bord que le décroissement n'atteint pas, ou, ce qui revient au même, le nombre de molécules qui composent la rangée additionnelle à laquelle répond cette portion de bord, sera

$$c+2n-2\times 3n=c-4n.$$

Donc retranchant six fois cette quantité de l'expression que nous avons trouvée plus haut, on aura

$$6(c+2n)^2-12(9n^2+3n)+6(c-4n),$$

pour la somme des molécules contenues dans les six lames qui composent une couche quelconque du rang n.

109. Pour trouver la loi de la seconde série, je remarque d'abord que le nombre total des lames de

ce qui donne pour chaque lame, abstraction faite de l'unité, une progression arithmétique dans laquelle 4 représente à la fois le premier terme et la différence entre chaque terme et le suivant, et $n'-1$ désigne le nombre des termes; ajoutant donc l'unité à la somme qui résulte de ces données, on aura pour la somme totale relative à une lame quelconque,

$$2(n'-1)^2+2n'-1.$$

110. Maintenant, soit toujours n le rang d'un terme quelconque, en partant de la première de toutes les lames de superposition; $c-1$ étant le nombre total des lames comprises dans les deux séries, on aura $n=c-1-n'+1$, ou $n=c-n'$. Donc $n'=c-n$. Si l'on substitue cette valeur de n' dans l'expression

$$2(n'-1)^2+2n'-1,$$

celle-ci devient

$$2(c-n-1)^2+2c-2n-1.$$

---

nombres qui correspond à une même lame, par exemple à celle de la figure D. On prend d'abord la molécule centrale, ensuite les molécules situées autour de celle-ci sur quatre lignes parallèles aux côtés du carré c', f', h', g', et l'on continue de même, en prenant les molécules qui répondent aux côtés des divers carrés concentriques que l'on peut tracer sur la surface de la lame. On a donc cette suite, 1, 8, 16, 20, 12, 4, qu'il ne s'agit plus que d'ordonner ainsi, 1, 4, 8, 12, 16, 20.

superposition est égal au nombre de demi-dia
de molécules situées en allant de O vers A (f
depuis la diagonale α jusqu'au centre γ de
EAIO, ou ce qui revient au même, il est
nombre c d'arêtes de molécule situées sur l'u
conque des côtés EO, OI, etc., moins l'unité

Nous avons vu que le nombre de molé
composent chaque rangée additionnelle
quelconque des lames de la première sér
expression générale $c-4n$. Or, dans la la
mine cette série, la rangée dont il s'agit
une seule molécule, telle que K (fi
alors, $c-4n=1$, et $n=\frac{c-1}{4}$. Dan
n représente aussi le nombre des lam
la série. Mais $c-1$ exprime le nombr
qui appartiennent aux deux séries. I
primera celui des lames dont est
série. Donc celle-ci renferme t
termes que la première, ce qu
facile pour reconnaître à laquel
rapporte une lame du rang n.

Soit n' le rang d'une lame
conde série prise en partant d
de molécules comprises dans
diquées par les figures I, H
cessivement $1, 1+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4}+$

(1) Voici de quelle manièr

résultats de la théorie, provient de ce qu'il est inscrit à ce dernier, en sorte que les lignes semblablement tirées dans l'un et dans l'autre font les mêmes fonctions.

Il résulte du rapport $\frac{1}{3}$ entre les nombres des lames qui composent les deux séries, que la somme totale de celles qui s'élèvent au-dessus d'une même face du noyau est un nombre pair, et si l'on suppose, comme cela est naturel, que la dernière lame se réduise à une simple molécule, le nombre des arêtes de molécule comprises dans chaque côté du noyau sera nécessairement impair, comme le représente la fig. 98 A. Dans le cas où il serait pair, la dernière lame devien-

drait un assortiment de quatre molécules cubiques réunies sous la forme d'un prisme carré.

113. Concevons maintenant que l'octaèdre secondaire ait pour noyau un rhomboïde AA′ (fig. 101), tel que celui de $104^d\frac{1}{2}$, qui appartient à la chaux carbonatée, et qu'il provienne aussi d'un décroissement par une rangée sur tous les angles de ce rhomboïde. L'arrangement respectif des molécules composantes sera encore le même, et ainsi les angles solides A, E, O, etc. (fig. 102), coïncideront encore avec les centres des faces de l'octaèdre. Mais parmi ces mêmes faces il n'y en aura plus que deux qui soient des triangles équilatéraux, savoir, les faces *bdf*, *enp*, situées autour des sommets A, A′, les six autres faces qui ont pour centre les angles solides E, O, I, etc., seront des triangles isocèles *dpf*, *bed*, *edp*, etc.

Or, les angles supérieurs EAI, EAG, etc., sur lesquels agissent les décroissemens qui donnent les triangles équilatéraux, n'étant pas dans le même cas que les angles inférieurs EOI, EHG, etc., et ces derniers étant différens des angles latéraux EOA′, IOA′, qui concourent avec eux à la production des triangles isocèles, l'octaèdre doit être considéré comme le résultat de trois décroissemens qui se rapportent aux trois espèces d'angles dont nous venons de parler, et qu'il convient de distinguer entre eux, puisqu'ils sont représentés par autant de triangles mensurateurs, dont chacun a des dimensions particulières. Mais pour simplifier nos conceptions à l'égard des décroissemens qui se combinent dans la formation des triangles isocèles, nous pouvons à volonté regarder chacun de ces triangles, par exemple le triangle *edp*, comme produit en vertu d'un décroissement par une rangée sur l'angle inférieur EOI, dont l'effet se prolonge au-dessus des faces EOA′H, IOA′K, ou comme produit en vertu d'un décroissement par une rangée sur les angles latéraux EOA′, IOA′, dont l'effet se prolonge en dessus de la face EOIA, et il semble d'abord indifférent d'adopter l'une ou l'autre manière de voir. Il est cependant à remarquer que par une suite de la position verticale qu'a maintenant l'axe du noyau, en passant par les sommets A, A′, le trapézoïde $d\gamma O\delta$ qui résulte du décroissement sur l'angle EOI, se rejette vers la partie inférieure de cet axe, en sorte que son inclinaison à l'égard de celui-ci est

les angles latéraux EOA', E
les faces EOA'H, IOA'H, aux
ces mêmes angles. Cette considé
dans le cas présent, une raison
croissement principal celui qui
latéraux, et de regarder l'a
qu'auxiliaire.

Mais si le décroissement su
faisait par deux rangées, auquel
sur les angles latéraux deviend
(*voyez* p. 122), alors il convien
déjà dit, de donner la préém
Ainsi, la position de chaque fa
daire étant donnée d'après la co
des triangles mensurateurs relati
semens qui concourent à la proc
c'est en général la raison de la p
qui détermine le choix de ce tri

114. Les décroissemens qui o
supérieurs EAI, IAG, etc. (fig.

résidus de leurs bords supérieurs, et l'effet de cette extension sera le même que si les triangles *dpf*, *dcb*, *edp*, etc. (fig. 102), s'étaient prolongés en dessus des faces *bdf*, *enp*, jusqu'à s'entrecouper, d'où il est aisé de conclure que le solide secondaire sera un rhomboïde *aa'* (fig. 102), plus alongé que le noyau. Dans le cas présent, où ce noyau est le rhomboïde de $104^d\frac{1}{2}$, qui appartient à la chaux carbonatée, le cristal secondaire est le rhomboïde de $78^d\frac{1}{2}$ dont j'ai déjà parlé, et que j'appelle *inverse*, pour des raisons qui seront exposées dans la suite.

115. Pour mieux concevoir la différence entre la structure de ce rhomboïde et celle de l'octaèdre représenté (fig. 102), imaginons que toutes les lames de superposition qui recouvrent la face AEOI (fig. 102 et 103), se projettent sur un même plan, comme on le voit fig. 104. Les grandes faces de ces lames seront d'abord des eptagones, tels que $mmm'm'm''m''m'''$, dont les côtés $m'm'$, $m''m''$, diminueront progressivement, jusqu'à ce qu'ils soient réduits à une simple arête de molécule. Dans le cas présent, où l'on s'est borné à neuf molécules sur chaque côté du noyau, le terme dont il s'agit a lieu dès la seconde lame. La grande face extérieure de celle-ci est l'eptagone $rrr'r'r''r''r'''$, qui est sensiblement un pentagone, à cause des côtés presque infiniment petits $r'r'$, $r''r''$. Il en est de même des grandes faces des lames suivantes, qui sont successivement les eptagones $uuu'u'u''u''u'''$, $xxx'x'x''x''x'''$, etc., que l'on peut assimiler à des pentagones.

116. Il y a ici une observation à faire par rapport à la dernière lame, qui, en supposant que le décroissement ait atteint sa limite, doit être composée d'une simple rangée de molécules désignée par qv. Or, tandis que les bords supérieurs mm, rr, uu, etc., des grandes faces qui appartiennent aux autres lames se dépassent mutuellement d'une quantité égale à une rangée, ceux qui ont la même position sur la dernière lame, et qui sont indiqués par nv, $n'v$, doivent rester de niveau avec les bords vv, vv''', relatifs à la lame précédente. Car, l'uniformité de la structure exigerait que l'excès de la dernière lame sur celle qui la précède se réduisît à un simple rhomboïde désigné par $v\varepsilon\lambda\zeta$, et qui laissât entre lui et la lame précédente un vide $vv\varepsilon$, égal à celui qui existe, aux endroits correspondans sur toutes les autres lames. Mais l'affinité laisse échapper ce rhomboïde, dont l'adhérence avec le cristal serait censée nulle, puisqu'il ne tendrait à compléter celui-ci que par son sommet inférieur.

117. Si l'on compare la figure 103 avec la 104e, et que l'on prenne la série des lames de superposition, en partant de la dernière, c'est-à-dire de celle qui est composée de la rangée indiquée par qv (fig. 104), il est facile de voir que cette rangée représente l'arête da (fig. 103), d'où il suit que celle-ci est parallèle à la diagonale oblique qui va de A en O. La lame suivante, désignée par $vvv'v'v''v''v'''$ (fig. 104), correspond à un pentagone $vvv'v''v'''$ (fig. 103), pris par une section faite en dessous de ad, et parallèle à la

face AEOI, et ainsi des autres lames. C'est ce que confirme le résultat de la division mécanique du rhomboïde secondaire, qui a toujours lieu suivant des plans situés entre l'arête *ad* et le rhombe AEOI, parallèlement à celui ci. La même comparaison fait voir encore que les arêtes latérales, telles que *ed*, *pd*, sont produites par la suite des arêtes $r'r'$, $u'u'$, $x'x'$, etc., $r''r''$, $u''u''$, $x''x''$, etc., qui s'élèvent comme par échelons les unes au-dessus des autres.

118. Je placerai ici une remarque que j'ai déjà insinuée, en parlant de l'octaèdre régulier originaire du cube (p. 137), et qui s'applique au rhomboïde que nous venons de considérer, ainsi qu'à une multitude d'autres formes secondaires, produites par des décroissemens soit sur les bords, soit sur les angles. Elle consiste en ce que certains points terminaux ou certains bords situés sur le solide géométrique dont nous nous servons pour représenter le résultat de la cristallisation, n'ont pas d'existence réelle sur ce dernier, mais y sont remplacés par d'autres points ou par des plans presque infiniment étroits, dont les différences de position avec les points et les bords analogues sur le solide représentatif échappent à nos sens par leur petitesse. Ainsi le sommet géométrique du dodécaèdre métastatique représenté (fig. 81) est l'extrémité *s* de l'arête E*s* (fig. 80); mais le sommet physique est le point culminant s' de la dernière des couches composées des lames de superposition prises trois à trois. Dans le rhomboïde que l'on voit (fig. 103), le sommet

géométrique est le point a, et le sommet physique est le point v (fig. 104), qui termine supérieurement la dernière des lames empilées sur la face AEOI (fig. 101) de la forme primitive. Les arêtes *da*, *ed* (fig. 103), n'existent de même que géométriquement parlant; l'analogue de la première, sur le rhomboïde produit par la nature, est la rangée de rhombes situés en dessous de cette arête, et compris entre les points v, v (fig. 104); et l'analogue de la seconde est, comme je l'ai déjà dit, la suite des petits côtés $u'u'$, $x'x'$, $z'z'$, etc., des eptagones qui forment les faces extérieures des lames de superposition. Plus les molécules seront déliées et plus les parties extrêmes du solide de la nature approcheront de se confondre avec celles qui leur correspondent sur le solide de la Géométrie, et qui en sont comme les limites. Mais quoiqu'elles ne puissent jamais atteindre ces limites, les solutions des problèmes qui sont l'objet de la théorie n'en sont pas moins rigoureuses, parce que les positions des plans géométriques auxquels elles se rapportent dépendent uniquement du mécanisme de la structure, en sorte que de ces trois choses, les inclinaisons respectives des plans dont il s'agit, la forme des molécules et leur arrangement, les deux premières étant censées connues, la troisième, savoir, l'arrangement des molécules, ou, ce qui revient au même, la loi de décroissement à laquelle elles sont soumises, se détermine à l'aide du calcul, avec toute la précision que l'on peut désirer.

119. Reprenons le noyau cubique représenté (fig. 95), et supposons que les lames de superposition empilées sur ses différentes faces, subissent vers leurs angles un décroissement qui ait lieu, non plus par une simple rangée de molécules, mais par deux rangées. Alors les trois faces produites autour de chaque angle solide tel que O, seront encore des trapézoïdes, puisque la marche des décroissemens est la même, quant à sa direction, que dans le cas de l'octaèdre (fig. 96), et qu'elle est seulement devenue plus rapide. Mais ces trapézoïdes ne seront plus de niveau; ils s'inclineront les uns sur les autres d'une quantité que l'on détermine par le calcul. La surface du cristal secondaire sera donc composée de vingt-quatre trapézoïdes distincts (fig. 105), dont la réunion produira huit angles solides tels que O, composés de trois plans, et six angles solides tels que s', composés de quatre plans. Les premiers, qui seront les termes de départ des décroissemens, se confondront avec ceux du noyau. Les autres répondront aux angles s, m', s', etc. (fig. 96), avec cette différence, qu'ils seront plus rapprochés des faces du cube primitif. Je déterminerai dans la suite les inclinaisons respectives des trapézoïdes.

La structure de l'octaèdre régulier que nous avons considéré précédemment, et celle du solide à vingt-quatre trapezoïdes qui vient de nous occuper, ont lieu dans deux variétés de fer sulfuré. Nous verrons dans la partie analytique ces mêmes formes reparaître

triangles isocèles ODP, OBP (fig. 108), qui s'élèveront en partant des angles D, B (fig. 106), et se réuniront en OP (fig. 108), parallèle à la diagonale menée de A en C (fig. 106). Les surfaces de ces triangles seront produites par les angles solides de molécules, contigus aux lignes $\gamma\epsilon$, $\zeta\vartheta$, $\mu\nu$, $\lambda\pi$ (fig. 107), et la ligne OP (fig. 108), qui est leur base commune géométrique, sera remplacée par la rangée de rhombes AC (fig. 107), qui représente le sommet physique du cristal.

En même temps que les lames de superposition décroissent vers leurs angles, elles restent de niveau par les portions de bords Cϵ, Cν, Cϑ, Cπ, etc. (fig. 107), que le décroissement n'atteint pas; et parce que ces portions de bords vont elles-mêmes en diminuant, les facettes latérales qui leur correspondent sur les lames de superposition forment par leur assemblage des triangles DPC, BPC, etc. (fig. 109), qui étant sur le même plan que les faces CDFG, BCGL, du noyau, convertissent celles-ci en trapèzes PDFS, PBLS, etc. (fig. 108 et 109). Le solide secondaire est donc dans cette hypothèse un octaèdre, ayant pour faces quatre triangles ODP, PBO, RSF, SLR, qui sont le résultat du décroissement, et quatre trapèzes PDFS, PBLS, ODFR, OBLR, composés des faces latérales du noyau et de leurs prolongemens.

121. Mais les octaèdres de baryte sulfatée qui dérivent du décroissement indiqué, se présentent sous un aspect tout différent de celui dont la figure 108

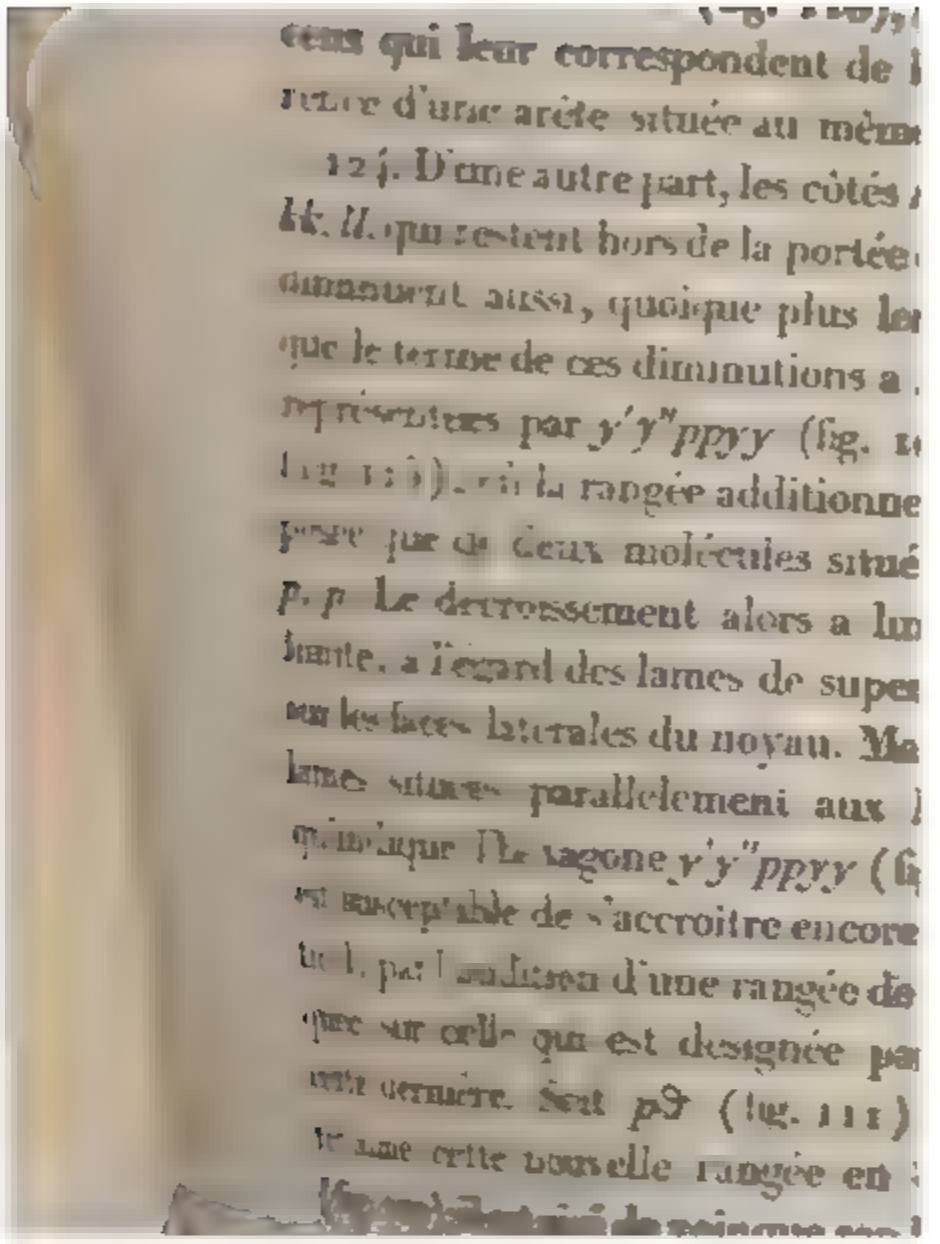
fait naître l'idée. Leur alongement, au lieu de se faire de bas en haut, se fait dans le sens d'un axe qui passerait par les milieux des arêtes CC, AN (fig. 106), ainsi qu'on le voit figure 110, où le noyau est représenté inscrit dans l'octaèdre secondaire. Cet octaèdre a encore pour faces quatre trapèzes et quatre triangles isocèles ; mais il y a échange entre les positions de ces deux espèces de polygones considérés dans les deux octaèdres, ainsi qu'on en jugera en comparant les figures 108 et 110. Il s'agit donc de ramener le mécanisme de la structure au résultat qui donne le second octaèdre.

Pour y parvenir, concevons que le décroissement agisse à la fois sur les trois angles plans qui concourent à la formation de chacun des angles solides D, B, L, F, et imaginons, comme dans le cas du premier octaèdre, que toutes les lames qui recouvrent la base ADCB se projettent sur un même plan, comme on le voit (fig. 107). Alors les faces latérales des lames de superposition ne resteront plus de niveau aux endroits que le décroissement n'atteint pas ; mais elles s'étendront par des additions de nouvelles rangées, en sorte que les grandes faces de la première seront semblables à l'hexagone *r'r''hhrr*, celles de la seconde à l'hexagone *s's''kkss*, celles de la troisième à l'hexagone *t't''att*, et ainsi des autres. Parmi les lames qui s'appliquent sur les faces latérales, bornons-nous à considérer celles qui s'élèvent au-dessus du pan CDFG (fig. 110). Si nous imaginons que toutes ces lames se

projettent sur le plan de cette même face, elles produiront l'assortiment que représente la figure 113, et dans lequel les grandes faces de la première lame sont indiquées par l'hexagone $hhh''h'h'$, celles de la seconde par l'hexagone $kkk''k'k'$, celles de la troisième par l'hexagone $lll''l'l'$, et ainsi des autres.

122. Dans la figure 107, les suites de petits rhombes comprises, l'une entre DC et hh, une seconde entre hh et kk, une troisième entre kk et ll, etc., sont les faces supérieures des rangées additionnelles de molécules dont j'ai parlé plus haut. Dans la figure 113, les suites de petits rectangles comprises entre les lettres correspondantes, savoir, DC et hh, hh et kk, etc., représentent des facettes latérales appartenant aux mêmes rangées, savoir, celles qui sont tournées vers la face CDFG, d'où l'on voit que chacune de ces rangées additionnelles est commune à deux lames de superposition appliquées sur des faces voisines, ainsi que nous l'avons déjà observé par rapport à d'autres variétés de cristallisation (*voyez* p. 92).

123. Les lames empilées sur la face CDFG commencent par se dépasser aussi mutuellement vers leurs bords parallèles à DF, en sorte que la première reçoit en cet endroit une nouvelle rangée comprise entre DF et $h''h''$, et qui lui est commune avec la lame correspondante, qui s'applique en même temps sur la face ADFM (fig. 110). Dans la lame suivante, la rangée additionnelle se réduit à une seule molécule désignée par $l''l''k''k''$ (fig. 113), et au-delà de ce



ceux qui leur correspondent de l
rieure d'une arête située au même

125. D'une autre part, les côtés
kk. ll. qui restent hors de la portée
diminuent aussi, quoique plus le
que le terme de ces diminutions a
représentées par *y'y''ppyy* (fig. 1
fig. 113), où la rangée additionne
passe par de ceux molécules situé
p. p. Le décroissement alors a lu
lante, à l'égard des lames de supe
sur les faces latérales du noyau. Ma
lames situées parallelement aux
quelconque De sagone *y'y''ppyy* (fi
est susceptible de s'accroître encore
tel, par l'addition d'une rangée de
que sur celle qui est designée pa
cette dernière. Soit *p9* (fig. 111)
le une crête nouvelle rangée en
(fig. 113) [illegible]

soit appliquée sur celle que représente $ppp''p''p'p'$ (fig. 113); elle ne fait que prolonger cette lame, en lui ajoutant deux petits quadrilatères placés l'un en dessus de $o\lambda pz$, et l'autre en dessous de $o'\lambda'p'z'$.

125. La figure 107 représente chaque lame de superposition parallèle à la base ADCB, dans l'état où est cette lame au moment même où elle est censée s'appliquer sur celle qui est en dessous. Mais à mesure qu'une nouvelle lame s'ajoute aux précédentes, toutes les rangées situées parallèlement à la diagonale AC sur ces mêmes lames augmentent d'une molécule vers chacune de leurs extrémités. Cette addition provient des lames qui s'appliquent en même temps sur les faces latérales du noyau. Bornons-nous à considérer l'effet de celles qui sont parallèles à la face DCGF (fig. 110 et 113).

Supposons qu'il n'y ait encore que la lame $r'r''hhrr$ (fig. 107) qui se soit appliquée sur la base ADCB. La rangée qui la termine vers l'angle D sera composée de trois molécules dont les angles extérieurs seront sur la ligne $r''h$. La lame correspondante au-dessus de la face DCGF (fig. 113) sera celle que représente l'hexagone $h''h''h'h'hh$. Concevons maintenant une nouvelle lame $s's''kkss$ (fig. 107), appliquée sur la précédente; son analogue au-dessus de DCGF (fig. 113) sera $k''k''k'k'kk$. Soit $n\downarrow$ (fig 112) la molécule à laquelle appartient la facette $v\omega\downarrow\phi$ (fig. 113), considérée sur la même lame. Le point ω situé immédiatement en dessous de k (fig. 107) se trouvant alors

molécule (1). Soient m, s, t, y, z, les nombres de molécules comprises dans ces deux rangées, en commençant par la plus basse. Ces nombres seront dans l'ordre de ceux que présente la série a, b, c, d, etc., en sorte que si $a=4$, on aura $m=0$, $s=0$, $t=1$, $y=2$, $z=3$. Si $a=6$, on aura $m=1$, $s=2$, $t=3$, $y=4$, $z=5$. Si $a=8$, on aura $m=3$, $s=4$, $t=5$, $y=6$, $z=7$; etc. On voit par là que, dans le cristal complet, le nombre des molécules comprises dans chaque rangée surpasse d'une unité celui des molécules que renferme la rangée précédente.

127. Le résultat précédent donne la limite théorique de la structure de l'octaèdre secondaire; c'est cette limite que représente la figure 110. Mais la cristallisation dépasse cette limite, en produisant des octaèdres plus alongés, suivant des rapports très variables, dans le sens des arêtes TU, XZ, et dont l'un se voit fig. 114. Cet alongement a lieu par une addition de lames constantes, égales à celle qu'indique l'hexagone $ppp''p''p'p'$. La projection de celle qui s'applique immédiatement sur cet hexagone est représentée par $zzz''z''z'z'$, et ainsi des suivantes. De plus, il faut concevoir que la rangée terminale py' (fig. 107), s'alonge proportionnellement vers chaque extrémité, par l'addition d'un nouveau rhomboïde $p\tau$, ou $y'\omega$,

(1) C'est une suite de ce que la distance entre le point m'' pris inférieurement, et le point D, est égale à cinq hauteurs de molécule.

129. Maintenant il est aisé de voir que le nombre de toutes les lames appliquées sur la base ABCD (fig. 107) peut être représenté par $u-1$, et si nous faisons abstraction de la dernière lame désignée par py, et qui est censée être ajoutée après la formation complète de l'arête TU (fig. 110), le nombre dont il s'agit devient $u-2$. Or, ce nombre est composé de deux parties, dont l'une renferme les lames dont l'application a précédé la formation de TU, de manière que n désigne aussi le rang de la dernière de ces lames, et l'autre partie renferme les lames dont l'application correspond à la formation de cette même arête TU. Le nombre de celles-ci sera donc

$$u-2-n, \text{ ou } (u-2)-\frac{(u-1)}{4}=\frac{3u-7}{4};$$

Mais ce dernier nombre est en même temps égal à celui des petits côtés $l'l''$, $m'm''$, $n'n''$, etc. (fig. 113), des lames qui s'appliquaient en même temps sur la face latérale CDFG (fig. 110); et parce que l'arête TU est l'assemblage de tous les côtés analogues à ceux dont il s'agit, la somme des distances entre le premier $k''k'''$ (fig. 113) et le second $l'l''$, entre celui-ci et le troisième $m''m'''$, sera égale à la moitié de la même arête, et il est facile de voir que chacune de ces distances est égale à une petite diagonale Ar' (fig. 107) de molécule (1). Or, le nombre de ces mêmes di-

(1) Pour estimer ces distances il faut remettre par la pensée les côtés $k''k'''$, $l''l'''$, etc., à leurs véritables places qui sont ici représentées en projection.

se réduisait à une simple molécule, et qu'alors le rang n de cette lame avait pour expression $\frac{u-1}{4}$; or, cette hypothèse étant la plus simple et la plus naturelle que l'on puisse faire, il en résulte que la quantité $\frac{u-1}{4}$ doit toujours être un nombre entier, quelle que soit la valeur de u; et ainsi le nombre des diagonales de molécule comprises dans la diagonale AC (fig. 106), ou, ce qui est la même chose, le nombre des arêtes de molécule contenues dans chaque côté du noyau sera nécessairement un des termes de la série 5, 9, 13, 17, etc.

131. Le rapport que nous venons de considérer est celui qui existe entre deux limites physiques dont l'une, qui est située vers le sommet, répond à l'hexagone $zy'z''zpd$ (fig. 110), qui est le même que celui de la figure 107, et l'autre, qui est située dans la partie latérale, répond au rectangle presque infiniment étroit $\mu\nu\omega\pi$, qui est tangent à l'arête $k''k''$ (fig. 113), et à toutes les autres qui appartiennent à la rangée de molécules placée au même endroit. Les limites géométriques correspondantes sont les arêtes O'P' (fig. 110) et TU, et il est facile de trouver leur rapport, qui n'est pas tout-à-fait le même que celui des limites physiques.

On voit d'abord que l'arête O'P' (fig. 110) étant comprise entre les mêmes lignes verticales que la diagonale py' de l'hexagone $zy'z''zpd$, il n'y a de ce côté

aucune différence entre les deux limites, en sorte que l'on peut aussi désigner O'P' par t, et faire, comme ci-dessus, $t = 3u - 4$.

Soient O'IUP', R''TUS' (fig. 115) les mêmes trapèzes que figure 110, et $\mu\pi\omega n$ (fig. 115) le même rectangle que figure 110. Soit $\gamma\xi$ (fig. 115) le bord supérieur de la rangée qui suit immédiatement celle à laquelle appartient le rectangle $\mu\pi\omega n$; par les points μ, π, menons μl et πK perpendiculaires sur $\mu\pi$. D'après ce qui a été dit plus haut, que chaque rangée renferme une molécule de plus que la précédente, $\gamma\xi$ surpasse $\mu\pi$ d'une quantité égale à une grande diagonale de molécule. Donc $\gamma\lambda$ et $\mu\xi$ sont égales chacune à une demi-diagonale de molécule. Maintenant l'arête TU étant à la même distance de $\mu\pi$ et de $n\omega$, il en résulte que Tμ est égale à la moitié de $\gamma\mu$. Donc, si nous menons Tδ et Uϵ perpendiculaires sur TU, les lignes $\mu\delta$, $\pi\epsilon$ sont aussi égales chacune à la moitié de $\gamma\lambda$; donc $\mu\delta$ et $\pi\epsilon$ valent chacune un quart de diagonale, d'où il suit que l'arête TU est plus petite que l'arête $\gamma\xi$ d'une quantité égale à une demi-diagonale. Or, nous avons eu $\gamma\xi$ ou $r = \frac{3u-7}{2}$. Soit TU $= r'$; nous aurons $r' = \frac{3u-7}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3u-8}{2}$. Dans le cas présent, TU : O'P' ou

$$r' : t :: \frac{3u-8}{2} : 3u-4 :: \frac{19}{2} : 23.$$

132. Cherchons le cas où l'on aurait $r' = \frac{1}{2}t$. Soit x

la quantité qui doit être ajoutée ou retranchée de chacune des expressions précédentes, pour que ce cas ait lieu. Nous aurons

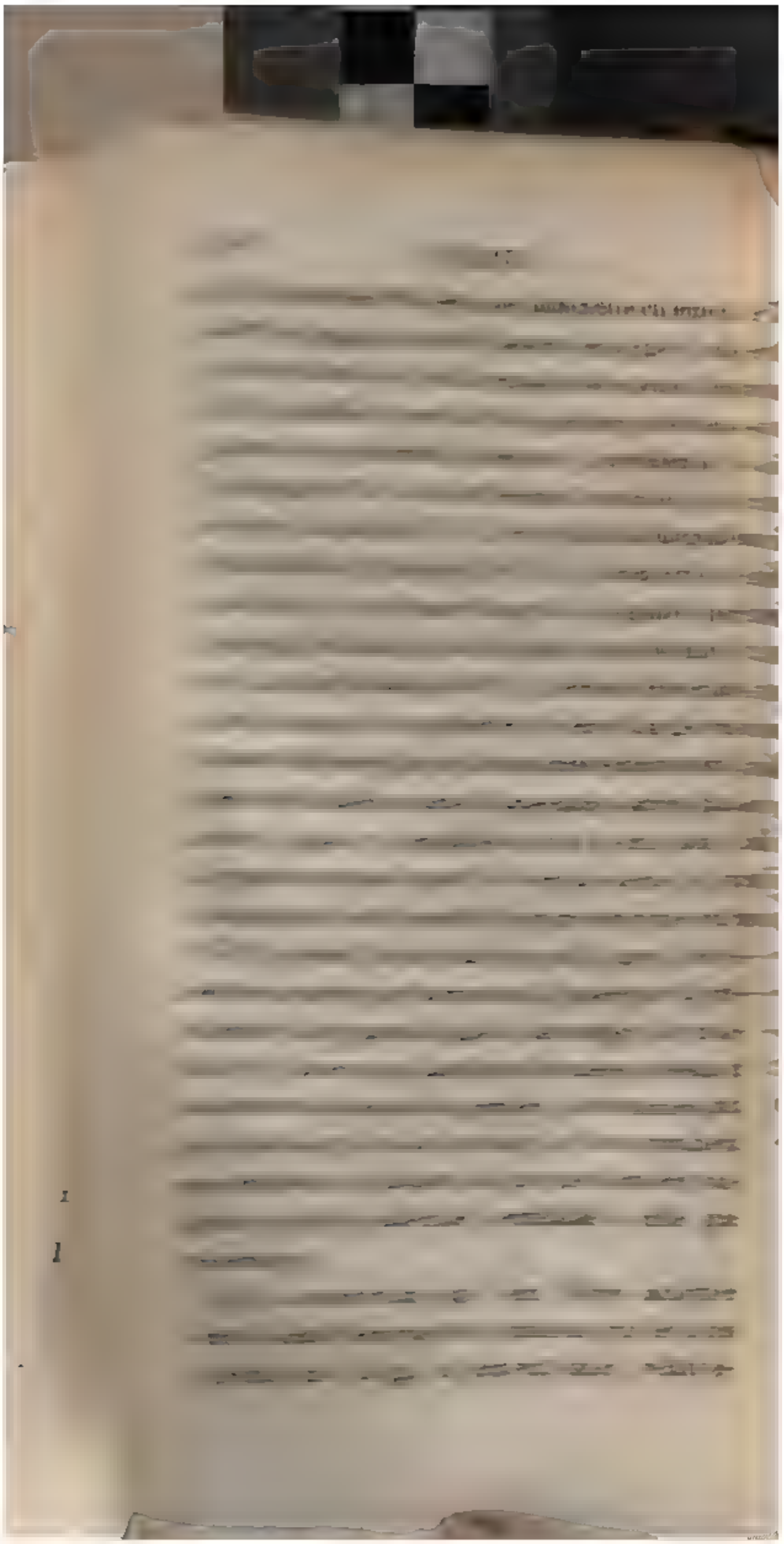
$$\frac{3u-8}{2}+x : 3u-4+x :: 1 : 2.$$

D'où l'on tire $x=4$; c'est-à-dire qu'alors le solide se trouverait augmenté de quatre enveloppes situées en dessus des faces P'U·S', P'ZS', O'TR', O'XR', en sorte que les nombres de diagonales de molécules comprises dans les arêtes TL, O'P', deviendraient

$$\frac{19}{2}+4 \text{ et } 23+4, \text{ ou } \frac{27}{2} \text{ et } 27,$$

ce qui donne le rapport indiqué.

133. Si l'on se borne à diviser un cristal de la variété dont il s'agit ici, par des plans parallèles aux bases de la forme primitive, en partant des arêtes TU, XZ, on obtiendra de part et d'autre une suite de lames hexagonales dont la dimension en longueur, comprise entre O'R' et P' S', sera constante et égale à O'P' ou R'S', et dont la dimension en largeur, perpendiculaire à la précédente, diminuera d'une lame à l'autre, de manière que s'il nous était donné de pousser la division mécanique jusqu'à sa limite, la dernière lame se réduirait à une simple rangée de molécules, représentée par *py'* (fig. 107). Cette observation peut servir à faciliter l'exécution d'un modèle en bois de la même variété. Si l'on suppose que le côté de la forme primitive soit composé de neuf arêtes de molé-



ment à leurs étendues respectives, ou, si on l'aime mieux, relativement aux divers rapports entre les lignes TU, O′P′ (fig. 110). Mais la forme du cristal a une limite géométrique différente de la limite théorique, et qui a lieu lorsque l'arête TU étant nulle, toutes les faces du cristal sont des triangles, ainsi qu'on le voit (fig. 116). Pour faire la synthèse d'un cristal qui offrirait cette limite, il faudrait d'abord concevoir des lames de superposition qui s'appliquassent simultanément en dessus des différentes faces du noyau, comme il a été expliqué plus haut, jusqu'au terme où la rangée additionnelle située parallèlement à l'arête DF (fig. 113) se réduit à une simple molécule désignée par $k''k''$. Soit bHl (fig. 116) le triangle qui, dans ce moment, est composé de la somme des bords parallèles à la diagonale AC (fig. 110). Si la superposition des lames continuait, au-delà de ce terme, en dessus des faces latérales CDFG, ADFN, il se formerait une arête dans le sens de TU, ce qui est contraire à l'hypothèse présente. Donc, pour que le mécanisme de la structure s'accorde avec cette hypothèse, il faudra imaginer que la série des lames de superposition parallèles à la base ABCD continue seule de fournir à l'accroissement du cristal, jusqu'à l'entière formation des triangles O′HP′, O′YP′ (fig. 116). Il est extrêmement rare de rencontrer cette modification parmi les cristaux de baryte sulfatée; presque tous offrent à la place de l'angle solide H une arête TU (fig. 110) plus ou moins alongée.

cules, on t
base hex
d'une mol
côtés pa
gones qu
l'hexago
ce que c
de molé
molécul
la rang
et *l*. Le
crés de
trans et
figure.
chettes
longue
dimin
t''l et
dire d
céde
cule
les :
par
cet
g
1

[illegible] veut ra- [illegible] mare d'un [illegible] exposer que [illegible] à un cer- [illegible] principal [illegible] s, ou deux dé- [illegible] duction d'un [illegible] ne l'un d'eux [illegible] posé lequel [illegible] ce qu'ils mar- [illegible]. jusqu'à ce [illegible] citer un ou [illegible] ques, relati- [illegible] solitaire par [illegible] cubique [illegible] rhombes [illegible] même agis- [illegible] du même [illegible] 96). Con- [illegible] se com- [illegible] aura [illegible] (fig. 117), [illegible] et les huit [illegible] second. [illegible] et AEOI [illegible] divisée [illegible] chaque [illegible].

Supposons d'abord que le décroissement sur les angles agisse seul; le contour de la première lame de superposition sera semblable à l'octogone *ttuut'u'u'*. Concevons au contraire que ce soit le décroissement sur les bords qui agisse solitairement; le contour de la première lame de superposition sera représenté par le carré *xxx'x'*. Or, les côtés de l'octogone étant situés extérieurement par rapport au carré *xxx'x'*, il est visible que dans l'hypothèse où les deux décroissemens seraient censés naître en même temps, l'effet du décroissement sur les bords rendrait nul celui du décroissement sur les angles, qui se trouve pour ainsi dire en arrière par rapport au premier, et le même retard continuant d'avoir lieu sur toutes les nouvelles lames de superposition que l'on peut imaginer à la suite de la précédente, jamais les deux décroissemens ne pourraient s'associer et marcher de concert vers le but proposé. La cristallisation ne produirait qu'un dodécaèdre rhomboïdal, sans mélange de facettes relatives à un octaèdre.

137. Concevons maintenant que les lames de superposition ne subissent d'abord que le décroissement sur les angles, et que cet effet ait lieu, par exemple, seulement sur les deux premières. Le contour de celle qui s'applique immédiatement sur le noyau étant toujours semblable à l'octogone *ttuut'u'u'*, celui de la suivante sera représenté par l'octogone *aabba'a'b'b'*. Supposons qu'à ce terme le décroissement sur les bords commence à agir conjointement avec l'autre. Les

...dre régulier originaire du cube, que j'ai exposée ...s haut, en sorte que si le décroissement s'arrêtait ... terme où l'autre est sur le point de s'associer avec ..., la forme secondaire serait un cube P (fig. 120), dont chaque angle solide se trouverait remplacé par un petit triangle équilatéral δ, qui serait la somme des bords croissans $u'l$, $b'a'$ (fig. 119), sur les lames de superposition disposées autour d'un même angle solide du noyau. Tandis qu'ensuite les deux décroissemens se combinent l'un avec l'autre, il se produit autour du triangle δ (fig. 120) trois nouveaux triangles $a\varepsilon\nu$, $b\varepsilon\pi$, $c\nu\pi$ (fig. 121), qui lui sont égaux et semblables. Si nous prenons pour exemple le premier qui est désigné par $a\varepsilon\nu$, il est facile de voir qu'il est la somme des bords décroissans $d'c''$, $f'e'$, $h'g'$, etc. Ces nouveaux triangles, joints au premier, composent un triangle unique d (fig. 117), qui est tourné en sens contraire du triangle δ (fig. 120).

A l'égard du décroissement sur les bords, dont l'origine est sur une ligne $a'a'$ (fig. 117), située au milieu des côtés $o'o''$, $o'o''$, des triangles d, d', son effet, pendant qu'il agit conjointement avec l'autre, est de produire, de part et d'autre de la ligne $a'a'$, un rectangle, tel que $a'a'o'o'$, qui est la somme des bords constans $a'a'$ (fig. 119), $c'c'$, $e'e'$, etc., et tandis qu'ensuite il agit seul à son tour, il produit au-delà de chaque rectangle un triangle isocèle, tel que $o'Ro'$ (fig. 117), qui est l'assemblage des bords décroissans $p'p'$ (fig. 119), $r'r'$, etc., en sorte que la totalité

lignes de départ :
du noyau, mais
qui appartient
seconde lame d
sième sera dou
celui de la q
eeffé'f'f'; cel
gghhg'g'h'h',
l'octogone pas
delà de ce ter
seul à son tou
série de lam
nière se réd

Il y a ici
bords *tu*, *z*,
noyau vont
décroisse
seul, et du
croisseme
dernier *m*
D'une aut
gardent
jusqu'au
décrois
dernier
déroiss
figures

138

seul, t

sur les angles agissait seul, par h' celle qui répond à l'action simultanée des deux décroissemens, et par h'' celle qui se rapporte à l'action solitaire du décroissement sur les bords.

Si nous considérons les différences en largeur entre chaque lame et la suivante dans le sens de la diagonale AO, il est aisé de voir que chacune d'elles étant mesurée vers chaque angle O ou A, par une demi-diagonale de molécule, le nombre de toutes les lames de superposition, ou celui qui représente la somme H de leurs hauteurs, sera égal à autant de demi diagonales de molécule qu'il y en a depuis O jusqu'en s', c'est-à-dire que l'on aura $H = c - 1$.

141. Remarquons maintenant que la ligne $o\lambda$ (fig. 121) mesure autant de fois la distance entre le bord qui répond à $u't'$ (fig. 119) sur la première des lames de superposition, et celui qui répond à $y'z'$ sur la seconde, que la quantité h renferme d'unités, et que la ligne $a\lambda$ mesure autant de fois la même distance que la quantité h' renferme d'unités. Donc, puisque le point o (fig. 121) est au centre du triangle $\mathcal{S}$, on aura

$$o\lambda : a\lambda :: 1 : 3 :: h : h'.$$

Donc $h + h' = \frac{1}{3}h$; ajoutant le nombre h'' de hauteurs relatif à l'action solitaire du décroissement sur les bords, on aura $H = \frac{1}{3}h + h''$, ou $\frac{4}{3}h + h'' = c - 1$.

La structure n'offrant aucune limite directe, relativement au rapport entre les étendues des faces d, s, on peut adopter, si on le veut, celle qui dérive de l'hypothèse que le nombre des lames de superposi-

deux lames consécutives de superposition, que h renferme d'unités, $\lambda\pi$ (fig. 121) mesurera autant de fois la même distance que $3h$ renferme d'unités; donc $a\pi$ la mesurera autant de fois qu'il y a d'unités dans $6h$. Maintenant, si nous prenons la distance entre les bords de deux lames consécutives de superposition situées parallèlement au côté OI (fig. 119), il est facile de voir que la ligne $o'o''$ (fig. 117), qui est la même que ac (fig. 121), et qui est parallèle à RR′ (fig. 117) mesure pareillement autant de fois cette dernière distance qu'il y a d'unités dans la quantité $6h$. Mais RΓ la mesure autant de fois qu'il y a d'unités dans h''. Donc $o'o'' : R\Gamma :: 6h : h'' :: 6 : 1$, à cause de $h'' = h$. Donc $o'a' = 3R\Gamma$. Mais $G\Gamma = o'a'$. Donc

$$o'a' : RG :: 3 : 4. \text{ Donc } o'o'' = \tfrac{3}{4} RR',$$

ce qui suffit pour construire le solide proposé, conformément à la limite que nous avons adoptée.

143. La distinction des époques auxquelles répondent les actions initiales des divers décroissemens qui se combinent pour produire une même forme secondaire, a encore lieu toutes les fois que ces décroissemens ont leurs lignes de départ situées parallèlement l'une à l'autre.

Prenons pour exemple le cristal représenté (fig. 122), qui appartient à la variété de chaux fluatée que j'appelle *cubo-triémarginée*, parce qu'elle offre l'aspect d'un cube dont chaque bord est remplacé par trois facettes. Ces facettes rapportées au véritable noyau,

jusqu'à ce qu'elles se rencontrent, elles seront dans le même cas que si le décroissement dont elles dépendent avait agi immédiatement sur les bords ou sur les angles d'un noyau plus volumineux que le véritable, et dans lequel celui-ci serait inscrit. Par exemple, les facettes s, s (fig. 122), étant celles qui sont contiguës aux bords du véritable noyau, imaginons que les facettes x, x, s'étendent jusqu'à s'entrecouper en masquant les facettes s, s. Leurs lignes de rencontre pourront être considérées comme les bords d'un cube qui aura de plus grandes dimensions que celui qui fait la fonction de noyau relativement aux facettes s, s, en sorte que, dans l'état actuel des choses, les facettes x, x, sont censées être la continuation de celles qui auraient pris naissance sur les nouveaux bords dont on vient de parler. Dans le langage ordinaire on substitue ces mêmes bords à ceux du véritable noyau, substitution d'autant plus admissible que le solide auquel ils appartiennent est censé n'être autre chose que ce noyau lui-même, qui se serait accru jusqu'à un certain terme sans subir aucune modification.

A l'égard des angles que font les facettes x et s, soit avec les faces i du noyau, soit entre elles, il est si facile de les déterminer d'après les lois de décroissement par une et par trois rangées qui les produisent, que je me contenterai de les indiquer ici. Incidence de s sur i 135^d; de x sur x $126^d 56' 8''$; de x sur s $153^d 28' 4''$.

qui est l'octaèdre régul[illegible].
semens, l'un simple, [illegible]
par *s*, l'autre interm[illegible]ode analy-
par *x*. Mais si nous [illegible]dépendent
comme noyau hyp[illegible]n ne prend
les facettes *s* sont [illegible]pour résoudre
une rangée sur l[illegible]n se propos[illegible]
cettes *x* dépend[illegible]x, auquel tel dé-
gées qui a lieu [illegible]parvient à l'aide
mais qui évident[illegible]si j'ai donné l'idé[illegible]
se termine. P[illegible]cours. C'est dans le[illegible]
départ sont d'[illegible]e triangles que la[illegible]
ritable noyau [illegible]mules dont elle se[illegible]
avoir duré pl[illegible]e progressive de la[illegible]
a produites [illegible]servent.
pas censé[illegible]au but que se pro-
sultats de l[illegible]à désirer pour
la lame d[illegible]tisfaire en éclairant
le sont le [illegible]déjà cité, à l'occa-
laquelle [illegible]chaux carbonatée et
144. l[illegible]emples de la mé-
sement [illegible]pour ainsi dire pas
cristalli[illegible]analytique franchit
sont cel[illegible]analogue à celle
table n[illegible]ordre de la struc-
parais[illegible]sivement sur les
pour [illegible]table à celui de ce
on ch[illegible]subir toutes les
croiss[illegible]tion de la forme

sée. Je vais reprendre ici le même sujet, dont veloppement tient à la considération des décroissemens que j'ai appelés *auxiliaires*, parce qu'ils secondent l'effet du décroissement principal, auquel tout le reste se rapporte.

146. Lorsqu'un même bord ou un même angle solide sert de terme de départ à divers décroissemens qui agissent sur les deux faces que réunit l'arête dont il s'agit, ou sur les trois faces qui interviennent dans la formation de l'angle solide, et cela de manière que les nouvelles faces qui en résultent soient inclinées entre elles, chaque décroissement est considéré comme un effet distinct qui se rapporte à une série de lames de superposition empilées sur la face primitive vers laquelle est tournée celle qui est produite par ce décroissement. Mais supposons que les nombres de rangées soustraites des deux côtés d'une même arête, ou autour d'un même angle solide, soient dans un tel rapport que les faces secondaires dont ils déterminent les positions se trouvent de niveau deux à deux dans le premier cas, ou trois à trois dans le second, de manière à n'en former plus qu'une; alors on pourra considérer celle-ci comme le résultat d'un seul décroissement dont l'effet se prolonge en sens contraire de celui suivant lequel agit ce décroissement. Or, le prolongement dépend à son tour soit d'un décroissement que subissent les lames appliquées de l'autre côté de la même arête, soit de deux décroissemens qui ont lieu sur les autres

Des Décrois

145. Dans les appl
tique aux résultats des
les variations des for
strictement que les do
chaque problème; et
est de déterminer la
croissement donne
d'un construction tr
en parlant des tria
petit espace occup
théorie puise les
sert pour représe
structure et les pr
Mais ce qui su
pose le géomètre
celui dont l'espr
la route qui con
sion du rhombo
de quelques au
thode synthétiq
à pas l'intervall
rapidement, en
de l'artiste qui
ture d'un en
différentes fa
cristal, des l
variations q

qui
nt dits
pporte
de dé-
on peut
l'égard
ir entre
est censé
ôt quelles
décider du

croissemens
répétera à l'é-
que je l'ai
ers ou les trois
rent, et ainsi
les cas où tous
ne rangée, soi

les bords, s
croiront q

ines penta
ant j'ai dém
mes sur que
ra d'un
ur deu
e aussi
eur

…e côté des mêmes bords comme auxiliaire à … du premier. On pourrait aussi supposer que … le cas inverse qui eût lieu ; mais la première …tion paraît être la plus naturelle, et celle qui …ggérée de préférence par l'aspect du dodé-…e.

… le décroissement en largeur avait lieu par trois, …re, cinq rangées, ou davantage, son auxiliaire …it par le même nombre de rangées en hauteur. …général, quand deux décroissemens agissent des …x côtés d'un même bord, de manière que les deux …es qui en résultent sont sur un même plan, celui …quel on rapporte l'effet principal a toujours pour …xiliaire son inverse. On peut en dire autant des décroissemens mixtes. Par exemple, si le premier décroissement a lieu par trois rangées en largeur et par deux rangées en hauteur, son auxiliaire agira par deux rangées en largeur et par trois en hauteur.

149. Les décroissemens sur les angles sont principalement ceux qui méritent de fixer l'attention, et exigent un certain développement. Soit AA′ (fig. 123) un parallélépipède quelconque qui subisse un décroissement par deux rangées sur l'angle O de la base AEOI. Le nouveau bord que le décroissement fera naître sur la première lame de superposition sera dirigé suivant *bc*, et si par le point *n* on élève *nz* parallèle et égale à O*g*, qui représente une arête longitudinale de molécule, elle mesurera la dimension du décroissement dans le sens de la hauteur; d'où il suit

[illegible] mènera par *oz*, en même temps [illegible] Donc le plan *beg*, qui s'a- [illegible] dessous de la base que la face pro- [illegible] à cause de l'égalité et du pa- [illegible] *beg*, sera situé parallèlement [illegible].

[illegible] si l'on considère le décroisse- [illegible] est censé agir sur la face EOA'H, [illegible] gauche l'effet du décroissement [illegible] croissement que la première lame [illegible] superposée sur cette face ayant son [illegible] *gc*, le décroissement auxiliaire [illegible] les soustractions de molecules [illegible] la ligne qui fait à l'égard de ce [illegible] même fonction que *nz*, par rapport [illegible] la base, doit être égale et paral- [illegible] entre deux arêtes latérales de molé- [illegible] On doit en conclure que le dé- [illegible] de deux rangées en hauteur de [illegible]. La même conséquence paraît se [illegible] de la ligne *gc*, et de la dimen- [illegible] décroissement qui intervient [illegible] les lames de superposition [illegible] KI. Cependant nous allons [illegible] on ne donne que l'équiva- [illegible] croissement, et qu'il est nécessaire [illegible] une marche différente, pour [illegible] combinaison avec celui du décroisse-

151. Soit GAH (fig. 124) la moitié inférieure d'une face d'un rhomboïde obtus, coupée dans le sens de la diagonale horizontale; et soient AHH'A', AGG'A', des portions des deux faces adjacentes; je choisis ici la forme rhomboïdale, parce qu'elle nous fournira plus bas une application des principes qui vont être exposés. Concevons que la face dont il s'agit subisse un décroissement par deux rangées sur l'angle A, dont l'effet se borne aux lames de superposition qui s'élèvent au-dessus d'elle. Les trois rhombes P, o, o', resteront à vide, puisque le décroissement agit par deux rangées. Les angles solides extérieurs γ, δ, ζ, des trois molécules qui ont pour faces supérieures les rhombes a, b, c, composeront le bord que le décroissement fera naître sur la première lame de superposition. Les deux rangées de rhombes a, b, c, et a', b', c', c'', resteront à vide sur la surface supérieure de cette même lame, par l'effet du décroissement, et le nouveau bord de la seconde lame sera composé des angles solides extérieurs des molécules qui ont pour faces supérieures les rhombes d, e, f, g, h. Il est facile de continuer cet assortiment par la pensée. Dans le même cas, les rhombes E, K, L, S, E', K', L', S', feront continuité avec les faces AHH'A', AGG'A', du rhomboïde générateur adjacentes à AG, AH, et que nous avons supposé être libres de tout décroissement.

152. Concevons maintenant que ces dernières subissent des décroissemens auxiliaires qui prolongent

qu[illegible] L'assortiment de-
qu'[illegible] représente la fig. 125.
bais[illegible] du décroissement
dou[illegible] à la face AHH'A'
rall[illegible] de superposition sera
à l[illegible] ux ont pour faces supé-
[illegible] . 5. *m*, *n*, *p*, etc. (fig. 125),
m[illegible] dont les faces supé-
p[illegible] . ζ, ϑ, ϵ, *r*, *s*, *u*, *x*, *z*. On
p[illegible] ement a lieu sur l'angle
d[illegible] les soustractions de molécules
[illegible] l'assemblage des deux rhom-
[illegible] fig. 125), une seconde celui
[illegible] et ainsi de suite. On voit
[illegible] n'a que l'épaisseur d'une
[illegible] la quantité dont chaque
[illegible] première, dépasse la suivante.
[illegible] le bord extérieur de la pre-
[illegible] suivant la direction $\sigma\chi$, et le bord
[illegible] seconde suivant la direction $\upsilon\psi$. La
[illegible] les deux bords qui sont sur un
[illegible] bombes tracés en lignes ponctuées
[illegible] des molécules de la pre-
[illegible] bombes tracés en lignes pleines sont
[illegible] des molécules de la seconde.

[illegible] les lignes $\sigma\chi$, $\upsilon\psi$, représenter
[illegible] dont la première lame dépasse la
[illegible] $\sigma'\gamma$ perpendiculaire sur $\sigma\tau$,
[illegible] la distance qui aurait lieu entre les

deux bords, dans le cas où le décroissement se ferait par une rangée de molécules doubles, puisque le triangle $\sigma\sigma'\tau$ étant la moitié d'une facette de ces molécules, la ligne $\sigma\tau$ est la diagonale de cette facette. Mais il est facile de voir que dans le cas représenté par la figure, la ligne $\gamma\lambda$ qui mesure la distance entre les deux lames que nous considérons est la moitié de $\sigma'\gamma$. C'est une suite de ce que la ligne $v\omega$ coupe en deux également le côté $\sigma'\tau$. Il résulte de là que le décroissement a lieu par une demi-rangée de molécules doubles, en sorte qu'il est l'équivalent d'un décroissement par deux rangées en hauteur des mêmes molécules, ainsi que l'indique la construction que l'on voit (fig. 123).

153. Si le décroissement principal avait lieu par trois rangées, le décroissement auxiliaire se ferait par un tiers de rangée de molécules triples, c'est-à-dire qu'il équivaudrait à un décroissement par trois rangées en hauteur des mêmes molécules. Dans l'hypothèse d'un décroissement principal par quatre rangées, la molécule soustractive serait quadruple de la véritable, et la distance entre deux lames consécutives serait le quart de celle qui répond à une rangée (1).

---

(1) En général, n étant le nombre de rangées soustraites en vertu du décroissement principal, le rapport entre les deux dimensions de la molécule sera celui de n à l'unité, et la distance entre deux lames consécutives sera $\frac{1}{n}$ de celle qui aurait lieu dans l'hypothèse d'une rangée soustraite.

(fig. 124). La première lame de s
terminée par les molécules qui ont
rieures les rhombes π, ν, i, k, m, n
et la suivante par les molécules do
rieures sont les rhombes $\eta, \zeta, \vartheta, \varepsilon,$
voit par là que le décroissement
HAA' (fig. 124), par des soustract
doubles, dont l'une est l'assembla
boïdes indiqués par π, ν (fig. 12
des deux rhomboïdes ϑ, ε, et
de plus que chaque lame n'
molécule. Reste à trouver l
lame, par exemple la prem
Or, il est aisé de voir que l
mière est alig é suivant
intérieur de la second
figure 126 représente c
même plan; il
sont les faces e
mière, et les rh

croissemens auxiliaires. Si, au contraire, on regardait comme décroissement principal celui qui agit suivant l'une des directions *ou*, *os*, par une rangée de molécules doubles, la mesure du décroissement auxiliaire suivant les directions *st*, *ur*, se trouverait modifiée convenablement, pour que la condition à laquelle doivent être soumis les prolongemens fût remplie.

Or, il est à remarquer que les faces produites en vertu du décroissement qui agit sur l'angle *gzh*, se rejettent en sens contraire de la face *gzhy*, sur laquelle naît ce décroissement, tandis que les faces qui résultent du décroissement sur les angles latéraux *aoh*, *aog*, s'étendent directement en dessus des faces auxquelles appartiennent ces angles, et cette considération doit faire donner la préférence à ces derniers décroissemens, comme étant ceux dont le dodécaèdre porte le plus visiblement l'empreinte.

155. Je rappellerai ici que la théorie n'est autre chose que l'art de représenter d'une manière qui s'accorde avec l'observation l'arrangement des molécules d'où dépendent les formes secondaires ; et lorsque nous sommes libres de choisir, comme ici, entre divers modes d'arrangement dont chacun peut également fournir les données du problème à résoudre, ce que nous avons de mieux à faire est de conformer notre choix aux conceptions dont notre esprit s'accommode le mieux.

J'ai promis de donner une application des prin-

cipes qui viennent d'être développés. Je prendrai comme exemple la variété de chaux carbonatée que j'appelle *prismatique*, dont les bases naissent d'un décroissement par une rangée sur les angles supérieurs du rhomboïde primitif, et les pans d'un décroissement par deux rangées sur les angles inférieurs; et je décrirai l'ordre de la structure, à l'aide d'une méthode synthétique analogue à celle que j'ai déjà employée par rapport à d'autres formes secondaires.

156. On voit (fig. 127) le prisme hexaèdre régulier de cette variété circonscrit à son noyau rhomboïdal, et dont l'axe est égal à celui de ce noyau. Cette condition est nécessaire pour ramener l'ordre de la structure du prisme à sa limite. Chaque côté du noyau est censé être composé de dix-huit arêtes de molécules intégrantes. La figure 128 représente la face LXYZ (fig. 127) du noyau, recouverte par la série des lames de superposition qui composent la partie correspondante du prisme. Pour bien concevoir les effets des variations que subissent ces lames, il faut imaginer que les plans ABCDEFGH, A'B'C'D'E'F'G'H' qui représentent leurs faces supérieures, se relèvent les uns au-dessus des autres d'une quantité égale à une épaisseur de molécule. Nous désignerons les lames dont il s'agit par les mêmes lettres.

157. Les lignes EF, E'F', MN, M'N', représentent les directions des nouveaux bords que le décroissement qui donne les bases fait naître sur les lames de

superposition, d'où il suit que ces bords se dépassent mutuellement d'une quantité égale à une demi-diagonale de molécule. Les lignes AB, A′B′, IK, I′K′, etc., sont les directions des nouveaux bords que le décroissement qui produit les pans fait naître sur les mêmes lames, et dont les distances respectives dans le sens de la largeur sont mesurées par une diagonale entière de molécule. Ces deux décroissemens suffisent pour déterminer le prisme. Les variations que nous allons considérer sont simplement auxiliaires, et l'on pourrait en faire abstraction, en leur substituant les prolongemens des faces produites par les deux décroissemens directs.

158. Dans la première lame de superposition ABCDEFGH, les deux rangées indiquées par BC, AH, et adjacentes aux bords YZ, YX, du noyau, sont destinées à le faire croître vers les parties de ces mêmes bords sur lesquelles le décroissement n'agit pas. Il en est de même des deux rangées indiquées par DE, GF, et adjacentes aux bords ZU, XU. Les décroissemens qui ont lieu suivant les directions CD, HG, font la fonction d'auxiliaires à l'égard de ceux qui agissent directement sur les angles YZK, YXH (fig. 127) du noyau, pour en prolonger les effets dans les intervalles compris entre Z et *fd* d'une part, et entre X et *lm* de l'autre. On voit à la simple inspection des petits espaces C*ge*, *e*ζD, que le décroissement suivant CD laisse à vide, qu'il se fait par des soustractions de molécules doubles. De plus, la di-

stance entre le bord CD et le point de départ Z, indique qu'il a lieu par une demi-rangée des mêmes molécules. C'est une suite de ce que cette distance n'est que la moitié de celle qui est entre le point ζ et le bord CD. On doit en dire autant du décroissement dirigé suivant HG.

Les mêmes considérations s'appliquent à la seconde lame A′B′C′D′E′F′G′H′, à l'égard de laquelle il nous suffira de remarquer que ses nouveaux bords C′D′, H′G′, qui sont l'effet du décroissement auxiliaire, sont dépassés par CD, HG, qui leur correspondent sur la première lame, d'une quantité égale à une demi-rangée de molécules doubles, conformément à ce qui a été dit relativement au résultat que représentent les figures 124 et 125.

Les rangées additionnelles analogues à celles qui sont indiquées par BC, B′C′, AH, A′H′, disparaissent sur la troisième lame IKLMNOI et sur les suivantes, mais l'addition des rangées parallèles aux bords ZC, XC, du noyau, et indiquées par LM, NO, L′M′, N′O′, etc., continue jusqu'à la sixième lame P′R′S′V′, exclusivement, en sorte que les figures de cette lame et de celles qui suivent sont des trapèzes, et la onzième lame *imlk*, qui est la dernière, se réduit à une simple rangée dont les molécules extrêmes sont indiquées par ϑ, ω.

159. Il se présente ici une considération qui ne doit pas être omise. Les points K, I, K′, I′, R, P, etc., situés aux angles inférieurs des lames de superposi-

ture. Car en observant à l'aide de la loupe, ou même à la vue simple, les parties situées à la jonction des pans *lff'l'*, *dff'd'*, etc., on y distingue souvent six autres pans extrêmement étroits, en sorte que le prisme est réellement dodécaèdre. Mais on néglige ces ébauches dans la distribution méthodique des variétés, et l'on ne donne le nom de *péridodécaèdre* qu'à celle qui offre les mêmes pans avec des dimensions très sensibles.

Les lames de superposition qui se recouvrent l'une l'autre en partant de la face UXYZ du noyau (fig. 128), sont successivement de trois figures différentes, savoir, celle de l'octogone, comme ABCDEFGH, celle de l'hexagone, comme IKLMNO, et celle du trapèze, comme P'R'S'V'. Cette gradation est l'inverse de celle que présente la division mécanique, en partant des sections qui se font parallèlement à l'arête *lf* (fig. 127), et aux autres qui sont tournées vers les faces du noyau. On aura une idée de cette dernière en reprenant ce que nous avons dit du résultat d'une opération semblable faite sur le prisme hexaèdre qu'on voit figure 33, pl. 3. Nous avons eu d'abord la figure du trapèze *loos* (fig. 34), ensuite est venue celle du pentagone A*Eool* (fig. 35), parce que nous supposions au prisme une hauteur plus grande que celle qui a lieu dans le cas de la limite représentée (fig. 127). Mais si l'on ramène l'opération à cette limite, le pentagone se change en hexagone, par le retranchement de son angle supérieur A (fig. 35).

[illegible] subsiste dans les diverses lames [illegible] (fig. 36), où il faut encore [illegible] que l'angle A soit remplacé par un côté. [illegible], les hexagones se quittent par [illegible] o, et leur séparation détermine [illegible] deux nouveaux côtés à la place de [illegible] qui convertit l'hexagone en octogone.

Des noyaux hypothétiques.

[illegible] L'exposé que j'ai fait, dans les articles précédens, des diverses manières d'agir des lois de décroissement auxquelles est soumise la structure des cristaux, suffirait déjà pour faire juger du grand nombre de formes auxquelles un même noyau est susceptible de donner naissance, et ce que j'ajouterai dans [illegible] des combinaisons de ces lois dans la production d'un même cristal, fera encore mieux concevoir combien serait vaste le tableau qui présenterait [illegible] toutes ces variétés, même en se bornant à [illegible] résultats les plus ordinaires des lois de [illegible]. Mais la théorie va beaucoup plus loin, [illegible] développement de ses principes conduit à une [illegible] conséquence non moins remarquable, savoir, [illegible] complété qui semblerait devoir être réservé exclusivement à la forme primitive donnée par la [illegible] mécanique, se communique à toutes les variétés du même genre, c'est-à-dire, par exemple, [illegible] dont il s'agit est un rhomboïde, comme

dans la chaux carbonatée, et si parmi tous les divers rhomboïdes qui peuvent en dériver, tels que l'équiaxe, l'inverse, le contrastant, etc., on en choisit un à volonté, et qu'adoptant ce rhomboïde pour noyau hypothétique, on le suppose composé de molécules qui lui soient semblables, on pourra obtenir toutes les autres formes par des lois régulières de décroissemens, soit sur les bords, soit sur les angles. La véritable forme primitive changera alors elle-même de rôle, pour aller prendre sa place parmi les formes secondaires. Quelques exemples suffiront pour donner une idée de cette sorte de souplesse des lois de décroissemens pour s'adapter aux différens types qu'on leur présente.

162. Choisissons pour noyau hypothétique le rhomboïde inverse de la chaux carbonatée. Si l'on suppose qu'il subisse un décroissement par une rangée sur ses bords supérieurs *ay*, *au*, *at* (fig. 129), c'est-à-dire semblable à celui qui donne l'équiaxe du véritable noyau, le rhomboïde secondaire *abfa'* prendra la forme de ce même noyau.

163. Le même décroissement transporté sur le rhomboïde contrastant *ama'o* (fig. 130), produira pour forme secondaire le rhomboïde inverse qui faisait la fonction de noyau dans l'exemple précédent (fig. 129). On voit ici, entre les rhomboïdes les plus ordinaires, de la chaux carbonatée, dont l'un est le primitif et les autres sont ceux qui en dérivent par

les décroissemens les plus simples, une filiation en vertu de laquelle l'inverse devient l'équiaxe du contrastant pris pour noyau hypothétique, le primitif devient celui de l'inverse, et le terme ultérieur étant celui qui répond au véritable noyau, le rhomboïde qu'il produit est aussi le véritable équiaxe. On peut continuer la série au-dessus et en dessous des termes précédens. Par exemple, le terme qui vient après l'équiaxe en montant, et qui serait par rapport à lui ce qu'il est à l'égard du véritable noyau, répond à un rhomboïde semblable à celui qui résulterait d'un décroissement immédiat par deux rangées sur les angles supérieurs du véritable noyau, et dont l'analogue existe dans la variété binaire de fer oligiste. Nous avons jusqu'ici cinq termes parmi lesquels le véritable noyau occupe le milieu, et les deux suivans de part et d'autre en dérivent immédiatement par des décroissemens très simples. Mais dans les termes ultérieurs les décroissemens qui remplacent ces derniers s'écartent de leur simplicité, et bientôt ils deviennent inadmissibles par leur complication.

164. Le rhomboïde inverse considéré de nouveau comme noyau hypothétique produira un rhomboïde $af'a'u'$ (fig. 131) semblable à l'équiaxe (fig. 38, pl. 3), en vertu d'un décroissement par deux rangées sur les angles supérieurs a (fig. 131). Si le décroissement se fait par une seule rangée sur les angles latéraux u, t (fig. 132), il en résultera un rhomboïde AA′ sem-

blable au contrastant (fig. 42, pl. 3). Si, en restant toujours sur les angles latéraux *u*, *t* (fig. 133), il agit par deux rangées, le résultat sera un dodécaèdre A A′ semblable au métastatique.

Enfin, si les bords latéraux D, D (fig. 134), du même rhomboïde hypothétique deviennent les lignes de départ d'un décroissement par trois rangées, on aura un nouveau dodécaèdre *ss′*, faità l'imitation de celui que je nomme *paradoxal*, et qui résulte d'un décroissement par une rangée de molécules doubles sur les angles latéraux du véritable noyau.

165. Je vais insister sur ce dernier résultat, parce qu'il offre un exemple d'un fait remarquable, qui a également lieu pour tous les décroissemens intermédiaires, soit sur les angles latéraux, soit sur les angles supérieurs et inférieurs, et d'après lequel on peut les considérer sous un point de vue qui les ramène à la simplicité des décroissemens ordinaires. Cette analogie est d'abord fondée sur ce que, dans ceux qui sont intermédiaires, le résultat est en général un dodécaèdre à triangles scalènes. Or, on peut toujours supposer un rhomboïde inscrit dans chacun de ces dodécaèdres, comme le véritable noyau l'est dans le métastatique. Nous avons vu que les six plans coupans qui mettent ce noyau à découvert passent, l'un par les arêtes EO, OI (pl. 3, fig. 46), un second par les arêtes OI, IK, un troisième par les arêtes IK, KG, et ainsi des autres. Maintenant, si l'on substitue au métastatique un dodécaèdre quelconque, produit par

les d[illegible] angles qu'un
Verta[illegible] nouveau sera par con-
trasta[illegible] différente, on pourra
devie[illegible] successivement, des
celui [illegible] arêtes analogues à
qu'il [illegible]er, et se représenter
contin[illegible] sous les bords inférieurs
précé[illegible] le fait dont j'ai parlé
quiav[illegible] est toujours une des
ce qu[illegible] vont naître du véritable
un rh[illegible] dont il s'agit, étant
décro[illegible], est susceptible de
angle[illegible], en vertu d'un dé-
logue[illegible] bords inférieurs.

Nous[illegible] nous offre un résultat
vérita[illegible] métique est semblable
de p[illegible] se produit d'un décrois-
des d[illegible], et celui qui donne le
ultéri[illegible] rhomboïde a lieu par trois
niers[illegible] décroissemens interné-
vienn[illegible] est tantôt le rhomboïde

16[illegible], ou quelqu'autre qui
comm[illegible] une des lois de struc-
at'a't[illegible] semble communiquer
en ve[illegible] à la loi d'où résulte
les an[illegible] le générateur.

se fait [illegible] métiques origi-
(fig. [illegible] ont également par
[illegible] se substituer aux

autres formes primitives, dans le cas des décroissemens intermédiaires. On en trouvera de nombreux exemples dans le cours de cet Ouvrage.

166 Il y a donc cette différence entre les deux espèces de décroissemens, que ceux qui suivent une loi ordinaire sont simples par eux-mêmes, au lieu que les autres étant compliqués, lorsqu'on les considère immédiatement, se résolvent en deux décroissemens ordinaires, dont l'un fait dépendre le noyau hypothétique du véritable, et le second établit la relation entre la forme proposée et le noyau hypothétique. Dans ces sortes de cas, la cristallisation semble ne s'écarter de la route qui aboutit à la simplicité que pour y revenir par une voie différente. Le cristallographe profite de ce circuit pour calculer par une méthode plus facile et plus expéditive les résultats des décroissemens intermédiaires. Elle consiste à déterminer d'abord la forme du noyau hypothétique, et la loi du décroissement ordinaire qui produit le dodécaèdre rapporté à ce noyau, ainsi que les incidences mutuelles de ces faces.

La même méthode lui fournit ensuite des données à l'aide desquelles une formule le conduit tout d'un coup à la détermination du décroissement intermédiaire qui agit sur le véritable noyau. Au moyen de cet artifice, il écarte les difficultés et les longueurs dans lesquelles l'aurait entraîné la solution directe du problème.

167. Dans toutes ces modifications où les formes

tour à tour rivaliser avec la
résultat de la division mécanique
même dernière subsiste sans altération,
grand l'unité d'espèce. Mais il y
dans l'hypothèse où la structure des
admet pour
aucun autre de joints naturels,
dans la théorie elle-même
reconnaître la forme primi-
fondamental. J'avais que le rhomboïde
, dressé sur un de ses est situé verticalement, a
ses arêtes de à un plan horizontal et à
, ce qui lui imprime le caractère
en deçà de laquelle la diffé-
entre les deux inclinaisons varie en sens con-
, cette propriété qui fait ressortir le rhom-
dont tous les autres, paraîtrait déjà
qu'il se est aussi distingué comme étant le
de cristaux à laquelle il appartient. De plus,
dans la série des rhomboïdes dont
semble de naître du précédent, comme
tient le milieu entre deux
et deux rhomboïdes aigus,
immédiatement à l'aide des lois les
clivage. C'est aussi celui
général ceux que l'on rencontre le
dans la nature par des lois d'une
, quelconque, se rapprochant plus ou moins
à un même rhomboïde. Ajoutons

à ces caractères que les stries qui sillonnent les faces d'un certain nombre de cristaux calcaires, ont des directions qui s'accordent avec la condition que leur noyau soit le rhomboïde de $104^d \frac{1}{2}$, et nous en conclurons que la théorie seule, secondée des indices qu'offre l'aspect extérieur des cristaux, pourrait faire deviner la véritable forme primitive de l'espèce dont il s'agit, sans qu'il fût nécessaire de pénétrer, pour l'apercevoir, dans le mécanisme de la structure. Les mêmes considérations s'appliquent à beaucoup d'autres espèces de minéraux, dont les variétés sont assez nombreuses pour se prêter à une comparaison d'où l'on puisse tirer des inductions analogues à celles qui viennent d'être exposées.

168. Après tout, si cette multiplicité d'hypothèses qui naissent du développement de la théorie pouvait être regardée par quelques minéralogistes comme un luxe qui la surcharge, plutôt que comme une véritable richesse, on pourrait répondre que nous ne sommes pas les maîtres d'arrêter le cours des conséquences auxquelles nous conduit l'observation des phénomènes de la nature, et qu'en étudiant les résultats des lois auxquelles la sagesse et la puissance de son auteur l'ont soumise, nous devons nous efforcer de les envisager sous toutes leurs faces, d'en saisir tous les rapports mutuels, et nous servir de nos théories et de nos méthodes de calcul, comme d'instrumens propres à étendre la portée de notre esprit, à mesure que le point de vue lui-même s'agrandit.

secondaires s
forme primiti
qui conduit à
et sa consta
a mieux, el
cristaux ca
exemple, n
des consid
pourraient
tive. On
de 104$^{d}\frac{1}{2}$,
ses faces i
un plan
d'une lim
rence en
traire. (
boïde de
indiquer
type de
nous av
chacun
équiaxe
rhomb
qu'il p
plus
dont
plus fi
simpl
si on

du même nombre de degrés, et font partie d'angles solides égaux. J'observerai à ce sujet que les diverses faces qui, dans une forme primitive, concourent à la formation d'un même angle solide, ne vont point au-delà de trois; du moins peut-on toujours les réduire à ce nombre (1).

Dans tout ce qui précède, nous avons comparé entre eux les bords ou les angles situés sur une même face. Maintenant, si nous comparons entre elles les diverses faces de la forme primitive, il sera évident que celles qui sont identiques, c'est-à-dire égales et semblables, doivent aussi s'assimiler les unes aux autres par les décroissemens que subissent les lames de superposition qui les recouvrent.

Par une suite nécessaire des mêmes principes, les bords ou les angles non identiques ne sont pas astreints à la répétition des mêmes décroissemens; c'est-à-dire que les uns peuvent en subir qui diffèrent de ceux auxquels les autres sont soumis, ou même rester libres, comme dans le cas où ils existeraient sur un noyau qui ne fît que s'accroître sans changer de forme. Je vais citer quelques exemples, pour mieux faire concevoir tout ce qui vient d'être dit.

---

(1) Cette réduction a lieu relativement à un octaèdre qui fait la fonction de forme primitive, au moyen de la substitution d'un paralléloèdre à cet octaedre, ainsi que je l'expliquerai dans la suite. Les angles solides qui dans celui-ci résultaient de la réunion de quatre plans, se trouvent alors convertis en angles trièdres.

[redacted] pl. 11) les bords [redacted] il en est de même [redacted] aussi identité entre [redacted] il n'en existe pas entre [redacted] l'angle supérieur A. [redacted] On voit que les lettres [redacted] du solide sont as- [redacted] le même accord se re- [redacted] toutes les autres espèces [redacted]

[redacted] (fig. 136) un prisme droit [redacted] à talons de noyau, et dont [redacted] B, C, G, diffèrent entre [redacted], qui étant pris deux [redacted] entre, sont identiques. Il [redacted] les quatre angles de chaque [redacted] CB, par exemple, n'est pas iden- [redacted] mais ils soient droits tous [redacted] côté B, qui appartient au pre- [redacted] du côté G, qui concourt [redacted] en sorte que l'égalité [redacted] au côté C, qui est commun [redacted]

[redacted] hypothèse, chacune des faces P, L [redacted] sur l'une des deux autres, [redacted] relatif à des lames [redacted] s'appliquent, par exemple, sur [redacted] de produire une facette à [redacted] le concours d'un second

décroissement relatif à des lames appliquées en même temps sur la face T, et qui produirait une autre facette inclinée en sens contraire de la première. Les trois faces sont, à cet égard, indépendantes l'une de l'autre, et la loi de symétrie demande seulement que tout ce qui a lieu par rapport à chacune d'elles se répète sur celle qui lui est opposée et parallèle.

171. Il n'en sera pas de même si les faces latérales M, M′ (fig. 137) du prisme sont identiques, ou, ce qui revient au même, si la base est un carré. Alors le même décroissement qui agirait, par exemple, à la gauche de G, et dont le résultat serait une facette plus inclinée sur M que sur M′, se répétera à la droite de la même arête, pour produire une seconde facette dont l'incidence sur M′ sera égale à celle de la première facette sur M. Il pourrait cependant arriver que, dans le même cas, l'arête G ne fût remplacée que par une seule facette; mais alors celle-ci ferait un angle de 135^{d} avec l'une et l'autre des faces M, M′; on pourrait la considérer comme étant l'effet de deux décroissemens simultanés par une rangée, qui agiraient des deux côtés de l'arête G, de manière que les deux facettes qui en résulteraient coïncidassent sur un même plan.

Enfin, si le solide qui fait la fonction de noyau est un cube, il suffira qu'un décroissement ait lieu sur un de ses bords ou sur un de ses angles, pour qu'il se répète sur tous les autres, qui sont, pour ainsi dire, à l'unisson du premier. Il n'y aura pas plus de

base. Si au contraire on adopte comme forme tive un prisme semblable à celui qui résulterait rolongement des pans M, T, dans cette hypo-e, les pans *r*, *r*, résulteront d'un décroissement ses quatre bords longitudinaux, dont la mesure endra du rapport entre les côtés de la base du me prisme. Or, la loi de symétrie indique que te base ne peut être un carré; car si cela était, les ns *r*, *r*, ne pourraient être le résultat d'un décroisse-nt par une simple rangée; autrement elles feraient angle de 135^{d} avec chacun des pans adjacens M, T. lles seraient donc produites par une autre loi, et dans cas elles devraient se répéter vers les faces T, en sant avec elles un angle de 150^{d}, égal à l'incidence r sur M, et avec cette dernière face un angle de 30^{d} égal à l'incidence de *r* sur T. La forme primitive ne peut donc être qu'un prisme à bases rhombes, ou un prisme à bases rectangles. Or, la division mécanique donne des joints parallèles les uns aux pans M, T, et les autres aux pans *r*, *r*; mais les premiers sont incomparablement plus nets et plus faciles à obtenir, et cette considération jointe à celles que fournit une autre forme secondaire que je m'abstiens ici de décrire, détermine la préférence en faveur du prisme à bases rectangles, comme forme primitive. La théorie donne pour le rapport entre les dimensions de C, B (fig. 136), de la base de ce prisme, celui de $\sqrt{10}$ à $\sqrt{7}$, qui diffère peu de celui des nombres 6 et 5, et d'après ce rapport, le décroissement qui pro-

[redacted] une simple rangée.
[redacted] exemple la variété
[redacted]), et que j'ai nommée
[redacted] est celle d'un prisme
[redacted] face P perpendiculaire
[redacted] ques c, c, etc., adja-
[redacted] ère. Parmi les pans du
[redacted], ceux qu'indiquent les
[redacted] eux des angles de 135^d,
[redacted] prolonge les quatre pans M
[redacted] qu'ils se rencontrent, en
[redacted] on aura la surface latérale
[redacted] transversale, prise par un
[redacted] base, sera un carré. Main-
[redacted] comme primitifs les pans M,
[redacted] d qui font avec eux des an-
[redacted] nt nécessairement le résultat
[redacted] une rangée sur les bords lon-
[redacted] auquel appartiennent ces pans;
[redacted] applique à l'hypothèse dans
[redacted] les pans d, d, comme primi-
[redacted] comme secondaires. D'une autre
[redacted] voir que les pans h, h, si-
[redacted] même pan M sont égale-
[redacted] re de même les deux pans
[redacted] autre d'un même pan d, font
[redacted]. cette nouvelle obser-
[redacted] aucun des deux prismes a
[redacted] carré; car cette figure exige

que les décroissemens qui donnent les faces h, h, se répètent de part et d'autre de l'arête longitudinale qui sert à ces décroissemens de ligne de départ.

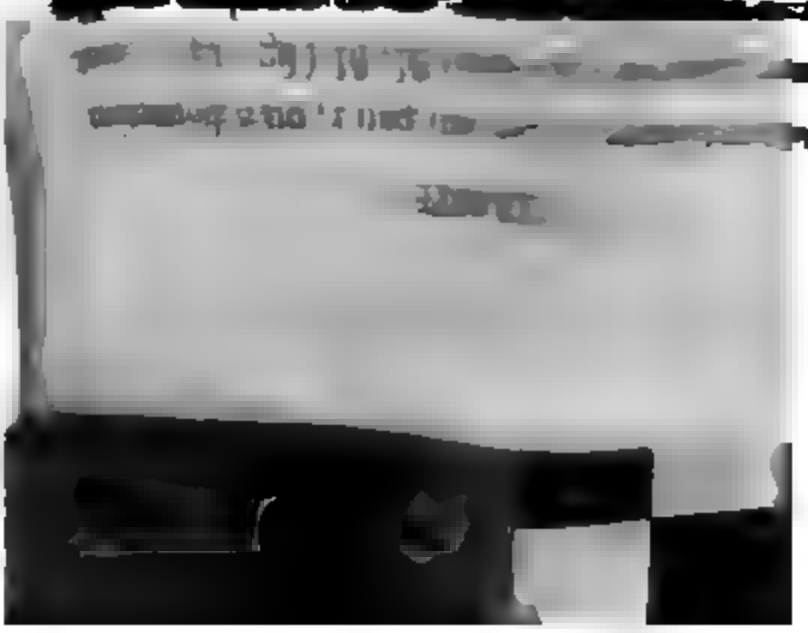
Maintenant, si l'on examine les faces c, c, du sommet, on observe qu'elles naissent sur des arêtes x, x', perpendiculaires aux arêtes longitudinales z, z', c'est-à-dire situées dans le sens des bords de la coupe transversale du prisme d, d, d'où il suit que, si l'on adopte ce prisme pour forme primitive, le décroissement qui donne les faces c, c, aura lieu sur les bords de la base. D'une autre part, ces faces étant également inclinées les unes sur les autres, il en résulte que dans l'hypothèse du prisme M, M, comme forme primitive, elles doivent naître sur les angles de la base; et puisqu'elles font entre elles des angles égaux, les bords de la base du prisme d, d, sont identiques, et il en est de même des angles de la base du prisme M, M; d'où l'on conclura que chacune des deux bases est un carré situé perpendiculairement à l'axe, ou parallèlement à la face P. D'ailleurs ce prisme ne peut être un cube, autrement les décroissemens qui auraient lieu dans les lames de superposition appliquées sur la face parallèle à P, différeraient de ceux qui se rapporteraient aux faces parallèles à d, d, ou à M, M, ce qui serait contraire à la loi de symétrie. La forme primitive est donc nécessairement un prisme droit à bases carrées, dont les faces latérales sont des rectangles. Le résultat de la division mécanique joint aux autres considérations fait connaître que ce prisme

duit les [illegible] I. M, et que
173. [illegible] que dans
d'idocra [illegible] ant, comme
idocras [illegible] nt par une rau-
à seize [illegible] mi lui succède
à l'axe [illegible] a lieu par deux
centes [illegible] ui qui donne les
prisme [illegible] ur les angles A, A
lettres [illegible] ntre le côté B de la
d'où il [illegible] celui de sept a huit.
ou les [illegible] ne sera fourni par
masq[illegible] ommait deux variétés
d'un [illegible] fig. 141 et 142,
plan [illegible] *aire*, a la forme d'un
tenan[illegible] eux faces *l*, *l*, qui se
M, d[illegible] me à l'axe. La seconde,
gles [illegible] *aire*, ne diffère de celle-ci
d'un [illegible] s, qui reçoivent le prisme
gitud[illegible] s angles mais avec les
le mê[illegible] ont l'incidence est de
laque[illegible] ans s d'environ 152°,
tifs, et [illegible] En appliquant ici le
part, [illegible] gard de la variété
tués d[illegible] ulfatée que l'on voit
ment [illegible] rmes dont il s'agit
h, *h*, [illegible] oit au prisme M. M
avec l[illegible] e est un rhombe,
vation [illegible] parallèles a *x*,
pour c[illegible] ses côtés perpen-

diculaires entre eux, et il sera facile de voir que cette coupe est nécessairement un rectangle, et non un carré : car, dans ce dernier cas, le prisme qui dériverait du précédent, comme forme secondaire, ne pourrait devenir hexaèdre, comme celui de la fig. 141; et dans l'hypothèse où il deviendrait octogone, comme on le voit (fig. 142), tous ses pans feraient entre eux des angles de 135d. Je m'abstiens de développer ces conséquences, qui s'offrent comme d'elles-mêmes. D'après tout ce qui a été dit ci-dessus, le prisme qui ferait la fonction de forme primitive ne pourra donc être que rectangulaire (fig. 143), ou rhomboïdal (fig. 144) (1). D'une autre part, la seule inspection des sommets indique que sa base est oblique à l'axe. Car, supposons pour un instant qu'il soit droit, les faces *l*, *l* (fig. 141), qui se réunissent sur une arête située obliquement, ne pourront résulter d'un décroissement ordinaire, soit sur les bords B, B, du prisme droit rectangulaire (fig. 143), soit sur les angles E, E, de la base du prisme rhomboïdal (fig. 144), puisque dans l'un et l'autre cas leur arête de jonction serait parallèle à la base, ou, ce qui revient au même, ferait un angle droit avec l'axe. Maintenant, si l'on fait attention que les arêtes *e*, *e* (figure 142), à la

(1) Quand même l'une et l'autre des formes prismatiques dont il s'agit ne seraient qu'hypothétiques, les conséquences du raisonnement que je fais n'en seraient pas moins fondées. Cette remarque s'étend également à toutes les autres formes dont j'ai parlé précédemment

[redacted]



C'est à la division mécanique qu'il appartient de déterminer les positions des pans de la forme primitive. Or, son résultat indique que les joints naturels latéraux sont parallèles les uns aux pans M, M (fig. 142), les autres aux pans *s*, *x*. Mais la plus grande netteté des premiers, et toutes les considérations théoriques, sont en faveur de l'adoption du prisme rhomboïdal (fig. 144) comme forme primitive. La molécule intégrante sera semblable au prisme triangulaire qui résulte de la sous-division du premier dans le sens de ses deux diagonales; et à l'égard de la base, l'observateur était assuré d'avance qu'elle était oblique; mais la division mécanique fait connaître qu'elle est située parallèlement à la face P (fig. 145).

J'exposerai plus loin, en parlant des dimensions des formes primitives, une propriété géométrique remarquable de celle de l'amphibole, et qui est générale pour tous les prismes rhomboïdaux obliques qui font la même fonction. Je ferai connaître l'influence de cette propriété pour donner à certaines formes secondaires un aspect qui ne fait que déguiser l'action de la loi de symétrie, sans porter aucune atteinte à cette loi.

176. Il est facile de concevoir, d'après tout ce qui vient d'être dit, comment le seul aspect des formes cristallines suffit, dans un grand nombre de cas, pour établir une distinction nette entre les espèces auxquelles ces formes appartiennent. Je vais rendre sensible, par un exemple, l'influence de ce moyen de classification.

jonction des faces *l*, *l*, — — — — — la même
des mêmes faces et de — — — node, fait
inclinées de gauche à — — — *gone*, est
lignes de départ du d — — — fig. 146),
l, *l*, ont des direct — — — pothèse où
sur le prisme rect — — — uper, compo-
(fig. 144), sur le — — — fig. 147) peu
soit l'espèce de dé — — — n de cette sub-
l, *l* (fig. 141), le — — — telles que *s*, *s*, *s*
se répètent du c — — — les sommets du
angles situés de — — — *n*, etc., sont si-
ou BEs (fig. 1 — — — des angles solides
offrir quatre l — — — . Romé de l'Isle,
contraire de — — — gnes, ont consi-

175. La — — — autre chose qu'un
même sub — — — angles solides. J'a-
dont la fo — — — opinion, qui me
celui de l — — — lement, d'après le
met à trou — — — dispensé de
à ε, et les — — — une des considé-
tions com — — — me à me détromper, a
ns (fig. 1 — — — qui naissent trois à
opposé à N — — — que A, et seule-
M (fig. 1 — — — térieurs E, E, tandis
principes, — — — ns et les autres
la partie — — — rme. Averti par
devraient — — — de symétrie, je
antérieu — — — g. 147), appar-
est oblique — — — ude aigu, et

es, vers un même sommet, un angle
es minutes. Les faces *s*, *s*, provien-
oissement par deux rangées sur les
rs du rhomboïde primitif, lequel n'at-
ute. Quelquefois son effet est complet,
duit un rhomboïde très obtus, dans
ence mutuelle de deux faces prises vers
mmet est de 144d. Le décroissement qui
ces *n*, *n*, a lieu par trois rangées sur les
ux. S'il parvenait à sa limite, il produi-
hécaèdre composé de deux pyramides
aèdres. Je donnerai, dans la partie analy-
émonstration de cette propriété, qui est
our tous les rhomboïdes.

terminerai par un exemple tiré d'une va-
haux sulfatée à laquelle j'ai donné le nom
zienne, et que représente la figure 148. On
e idée de sa forme, en concevant un parallé-
ne obliquangle *abcd*, sur les côtés duquel s'é-
d'une part quatre trapèzes, tels que *l*, *f*, etc.,
autre part quatre trapèze *l'*, *f'*, etc., inclinés
ième quantité en sens contraire des premiers.
ide est terminé par deux parallélogrammes
angles, savoir, P et son opposé, parallèles à
dont les côtés se confondent avec les bases des
èzes.

faisant tourner ce solide à la lumière, de ma-
e que le rayon visuel soit dirigé vers une des
P, on aperçoit à l'intérieur des lamelles sur les-

obliquangle. Or, on peut faire ici trois hypothèses différentes, savoir, que les trapèzes résultent d'un décroissement sur les quatre bords du parallélogramme, ou d'un décroissement sur les quatre angles, ou d'un premier décroissement sur deux bords opposés, et d'un second sur deux angles pareillement opposés.

178. Le problème est aisé à résoudre au moyen de la division mécanique. Il ne s'agit que de faire dans le cristal une section parallèle à P, ce qui se fait avec une grande facilité. Soit *gosr* (fig. 149), la projection de la lame détachée par le plan diviseur, et sur laquelle les côtés *os*, *sr*, etc., répondent à ceux qui sont marqués des mêmes lettres (fig. 148). En frappant sur cette lame avec un corps dur, on y voit paraître des fissures qui se croisent, comme les lignes que présente la figure, et qui sont les naissances d'autant de joints naturels perpendiculaires à la face P. Il est visible que tous les petits parallélogrammes qui ont pour côtés les fissures dont je viens de parler, en supposant que ces côtés soient dans le rapport que j'indiquerai bientôt, représentent les bases d'autant de molécules soustractives. On voit de plus que les sous-divisions de la lame, adjacentes aux deux bords *os*, *gr*, se réduisent à de simples triangles. De là on conclura que le décroissement qui donne les trapèzes *l* (fig. 148), a lieu sur deux des angles de la base du solide primitif, tandis que celui d'où résultent les trapèzes *f* naît sur deux côtés. Si l'on sup-

pose que le décroissement sur les angles suive une loi ordinaire, comme l'indique une observation dont je parlerai dans l'instant, les lignes *os* et *gr* seront visiblement parallèles à la diagonale de la base du solide primitif vers laquelle sont tournés les angles qui subissent le décroissement. Il suit de là que chaque triangle *out*, *oxy*, etc., représente une moitié de cette base coupée dans le sens de la même diagonale. Or, si l'on mesure les trois angles d'un des triangles tel que *oxy*, on trouve à peu près $o = 50^d$, $y = 60^d$, $x = 70^d$. De là il suit que les deux côtés *ox*, *yx*, de la base sont inégaux, en sorte que le premier est plus long que l'autre, à très peu près, dans le rapport de 13 à 12, et ainsi la base est un parallélogramme obliquangle, comme l'avait déjà indiqué la loi de symétrie. La position de ce parallélogramme, dans le cristal de la variété trapézienne, répond à celle du parallélogramme AEA'E', dont le centre se confond avec celui du parallélogramme *gosr*.

179. Les lames de chaux sulfatée, semblables à celle dont il s'agit ici, offrent assez souvent des indices de joints naturels dans le sens de la diagonale menée de A en A'. J'ai observé aussi, dans plusieurs des mêmes lames, des couches très minces d'une matière étrangère dont les directions étaient parallèles à la même diagonale. Il suit de là que les molécules intégrantes de la chaux sulfatée sont des prismes triangulaires qui ont pour bases des triangles scalènes semblables à *otu*. Ces molécules réunies deux à deux

ensuite vers le nord, par une de ses extrémités, après qu'on lui a communiqué le magnétisme.

181. Le dodécaèdre à plans pentagones originaire du cube (fig. 75, pl. 5) dont j'ai donné plus haut la description, s'écarte, par sa structure, de la marche ordinaire des décroissemens relatifs à cette forme primitive, mais il ne déroge réellement pas à la loi de symétrie. Tous les bords du noyau subissent l'action simultanée des mêmes décroissemens, l'un par deux rangées en largeur, l'autre en sens contraire par deux rangées en hauteur. De plus, il remplit cette condition essentielle de la loi de symetrie, qui exige que les décroissemens auxquels sont soumises les lames de superposition appliquées sur toutes les faces primitives s'assimilent entre eux, et de là vient que les parties ajoutées au noyau par l'effet des décroissemens ont exactement la même forme. Seulement l'action de chaque decroissement n'a lieu que sur deux bords d'une même face qui sont parallèles l'un à l'autre. Mais cette action est symétrique en ce que les divers décroissemens s'exercent suivant trois directions perpendiculaires entre elles, représentées par les trois arêtes terminales *pq*, *tn*, *rs*, ou, ce qui revient au même, par les trois dimensions du cube.

182. Les espèces dont la forme primitive n'est pas un des solides réguliers de la Géométrie, offrent aussi des cristaux qui sembleraient déroger à la loi de symétrie, par l'absence de quelques-unes des facettes destinées à remplacer des parties identiques. Tels

des autres n'avertissait de les chercher; et ces légères ébauches, à leur tour, peuvent servir à interpréter l'absence des facettes qui manquent absolument. On pourrait comparer les anomalies apparentes dont je viens de parler, à celles qui ont lieu dans les plantes, lorsqu'une cause accidentelle a fait avorter quelques-unes des étamines dans une fleur où le nombre de ces organes est d'ailleurs déterminé par les lois auxquelles est soumise la végétation.

183. Je ne dois pas omettre d'ajouter ici un résultat d'observation qui nous montre une corrélation entre l'aspect des joints naturels, dépendant du tissu qu'ils présentent à la lumière, et le rapport de leurs dimensions. Ce résultat est lié à la loi de symétrie, en ce qu'il concourt avec la forme des cristaux à indiquer si les faces primitives dont l'œil compare les reflets sont ou ne sont pas identiques, suivant que les impressions qui en résultent sur cet organe se confondent ou sont distinguées entre elles. Ainsi, dans les rhomboïdes et dans les octaèdres extraits par la division mécanique, ou donnés immédiatement par la cristallisation, toutes les faces étant identiques ont le même eclat et le même poli, et les joints naturels qui leur correspondent s'obtiennent avec la même facilité. Dans les prismes droits ou obliques, dont les bases ont leurs côtés égaux, tels que ceux qui font la fonction de forme primitive dans la staurotide, la mésotype, l'amphibole, le pyroxène, le plomb chromaté, etc., les pans étant semblables et

égaux n'ont rien non plus qui les distingue sous le rapport des caractères dont je viens de parler. Mais les bases qui diffèrent des pans par leur figure et par leur étendue, empruntent de cette diversité un aspect particulier qui n'est plus celui des faces latérales. Enfin, si ces dernières diffèrent entre elles, comme lorsque la forme primitive est un prisme droit à bases rectangles, la différence dont il s'agit en déterminera une plus ou moins sensible dans leur degré de poli et dans les reflets qu'elles renvoient successivement à l'œil, lorsqu'on fait varier la position du prisme.

Ainsi il suffit que deux joints adjacens, sur une forme primitive obtenue par la division mécanique, présentent à l'œil des indices de deux tissus différens, pour que l'observateur soit fondé à en conclure que les facettes de molécules qui correspondent à ces joints diffèrent aussi entre elles par le rapport de leurs dimensions; et c'est même cette différence qui, en faisant varier les actions réciproques des molécules, suivant qu'elles s'attirent par tel *latus* plutôt que par tel autre, exercent son influence sur les lois de décroissemens, dont les effets laissent sur le cristal l'empreinte de la différence dont il s'agit. Je vais citer des exemples de cette corrélation, en vertu de laquelle l'inégalité d'étendue entre les facettes d'une molécule presque infiniment petite devient sensible par la diversité des impressions que font sur l'œil les rayons que ces facettes lui envoient.

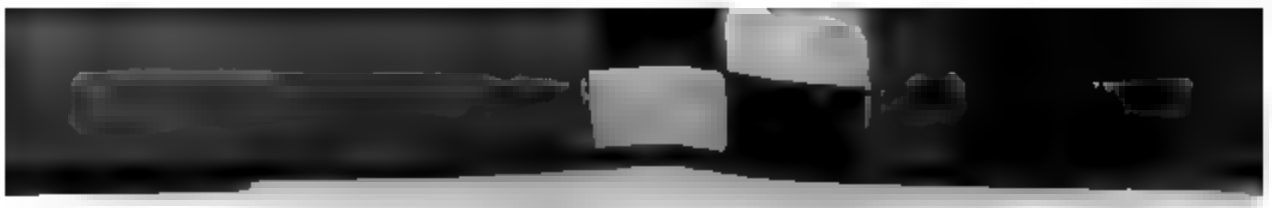
184. Je reprends la forme primitive de la chaux

anhydro-sulfatée. Si l'on compare entre elles les faces M, T (fig. 136), soit sur les cristaux, soit sur les fragmens obtenus par la division mécanique, on observe que les dernières ont un éclat nacré, tandis que les autres, dont l'étendue est différente, n'ont qu'un éclat ordinaire qui tire sur le vitreux.

Je ne dirai rien ici de la chaux sulfatée, parce que j'aurai bientôt occasion d'y revenir, pour citer des observations relatives à des effets qui lui sont particuliers.

La stilbite, dont je n'ai pas encore parlé, est une des substances qui méritent le mieux de trouver ici leur place. Sa forme la plus ordinaire est celle d'un prisme rectangulaire (fig. 154, pl. 12) terminé par des sommets à quatre faces rhomboïdales qui sont tournées vers les arêtes longitudinales. Deux des pans, savoir, M et son opposé, ont le luisant de la nacre, les deux autres n'ont qu'un éclat vitreux. La même différence se montre sur les joints parallèles aux pans. On observe aussi des joints perpendiculaires à l'axe, dont l'éclat est plus faible que celui des pans T.

Ces observations suffisent pour indiquer que la forme primitive ne peut être qu'un prisme droit rectangulaire (fig. 155), dont les faces sont de trois dimensions différentes. L'aspect géométrique des cristaux s'accorde parfaitement avec cette indication. Si l'on mesure les incidences respectives des faces terminales r, r, r', on trouve que celle de r sur r est sensiblement plus forte que celle de r sur r', la première



égal
rap
les
leu
pa
Ei
lo
r
t
é
l
l
v
qu
i

de 112d $\frac{1}{4}$, ce qui
la forme primitive
alors les faces termi-
résultat d'un décrois-
autre angles de la base,
décroissement serait inter-
faces au lieu de quatre,
des lignes de départ si-
chaque angle. Mais il est
décroissement ordinaire
galement inclinées les unes
pas moins évident que la
différente de celle de chacun
à M, T. Ainsi l'aspect géo-
ne fait autre chose que con-
sidérations théoriques, ce qu'un
simple fracture avait déjà
Le rapport entre les trois
le donne la théorie, est celui
$\sqrt{3}$, $6\sqrt{2}$, ou à peu près celui

che est celle qu'offrent ordi-
de stilbite. Mais on en trouve
rod, qui sont d'un rouge obscur,
, en Norwège, qui sont d'un
ncé; mais l'éclat nacré persiste
de la couleur, de même à
re ou la qualité du son qui ca-
s'associe aux différens tons

qu'on lui fait rendre. On en peut dire autant de l'éclat vitreux des pans T qui perce à travers la couleur, quelle qu'elle soit. Dans les cristaux qui dérivent d'un prisme dont les pans sont égaux en étendue, l'éclat subsiste aussi, malgré le changement de couleur, et, de plus, il est de part et d'autre au même degré. Ainsi, dans le prisme de l'amphibole, les pans ou les joints naturels parallèles à l'axe peuvent être substitués l'un à l'autre, comme à l'insu de l'œil, qui voit des deux côtés la même vivacité de poli et d'éclat : c'est l'unisson de la lumière réfléchie.

186. Lorsque la division mécanique se fait parallèlement à des faces qui ont la même étendue, il est évident qu'elle doit être également facile de part et d'autre. Dans les corps dont les faces diffèrent par leurs dimensions, on peut dire en général que celles dont l'éclat est plus vif sont les plus petites, d'où il suit que les joints naturels qui leur correspondent sont ceux qui se prêtent le plus facilement à la division mécanique, parce que les molécules à l'aide desquelles elles exercent les unes sur les autres les attractions d'où dépend leur adhérence étant en plus petit nombre, elles doivent moins résister à leur séparation. C'est ce qui a lieu dans le prisme de la stilbite, dont les faces M, T, P, que je range ici dans l'ordre suivant lequel leur éclat va en diminuant, sont entre elles à peu près comme les nombres 6, 10, 15, qui vont au contraire en croissant.

Cependant il pourrait arriver que de deux faces

tendue entre les faces latérales est peu sensible à l'œil; mais on la saisit avec la main lorsqu'on essaie de rompre une lame mince obtenue par la division mécanique. Si la séparation de ses deux parties tend à se faire dans le sens des bords B, B, qui sont les plus courts, on remarque qu'elle cède facilement à la flexion, et se rompt pour ainsi dire mollement, au lieu que dans le sens des deux autres bords elle oppose une certaine résistance et finit par se casser net.

Je citerai encore une expérience à l'aide de laquelle l'action de la chaleur confirme l'indication de celle de la lumière, dont j'ai parlé plus haut. Lorsqu'on expose un morceau de chaux sulfatée au feu du chalumeau, de manière que le jet de flamme soit dirigé vers les faces latérales des molécules, il y a fusion avec bouillonnement. Mais si le jet de flamme est dirigé perpendiculairement aux bases, le morceau ne fait que se calciner sans se fondre. Or, la fusion n'étant autre chose que la séparation des molécules d'un corps par l'intermède du calorique, il en résulte que, dans le premier cas, où le fluide tend à s'introduire entre les bases des molécules qui ont moins d'étendue que les pans, sa force élastique lutte avec plus d'avantage contre leur adhérence, en sorte qu'elles se séparent, c'est-à-dire que le corps se fond. C'est le contraire dans le second cas, où le calorique tend à pénétrer dans les interstices des faces latérales, qui, ayant plus d'étendue, opposent une plus grande résistance à leur séparation. Le corps éprouve seule-

une alors une calcination qui, pour s'opérer, n'exige pas autant de chaleur que la fusion.

188. Les considérations qui viennent d'être exposées au sujet de la loi de symétrie sont si simples, qu'elles s'offrent comme d'elles-mêmes, et qu'elles ne semblent dire autre chose que ce qu'on savait d'avance. Cependant cette loi n'a pas obtenu à beaucoup près, jusqu'ici, une attention proportionnée à son importance, et a été méconnue même par les plus célèbres cristallographes. J'ai cru devoir, par cette raison, donner ici un grand développement aux résultats qui s'en déduisent, et il est même doublement nécessaire que des vérités si long-temps négligées, et d'une assez grande importance pour que leur connaissance méritât d'être achetée par un long travail, soient en même temps si accessibles, que la route qui y conduit n'ait besoin que d'être montrée.

De la manière dont l'accroissement se combine avec la structure.

189. On sait combien sont variables les dimensions des cristaux d'une même substance qui se sont formés à la surface de certaines pierres. Cette variation s'étend quelquefois entre des limites très éloignées, en sorte que tel cristal ne peut être distingué que l'aide de la loupe, tandis que tel autre frappe seul par la grandeur de son volume. Cependant, si on examine attentivement le premier, on remar-

quera que sa forme, que nous supposons être secondaire, est aussi complète que celle de l'autre, et en remontant par la pensée à sa naissance, on doit concevoir que l'arrangement des molécules par lesquelles sa formation a commencé, représentait déjà comme en raccourci celui qui existe dans le plus volumineux, de manière que pendant tous les instans qui ont suivi il n'a fait que s'accroître en conservant la même forme. Deux ou trois exemples, choisis parmi les plus simples, suffiront pour expliquer comment l'ordre suivant lequel se fait cet accroissement se concilie avec celui que paraîtrait indiquer la série des lames décroissantes appliquées sur les différentes faces du noyau que nous obtenons par la division mécanique.

190. Je tirerai le premier exemple du dodécaèdre à plans rhombes originaire du cube. Nous devons supposer que le noyau de ce dodécaèdre, considéré dans le premier instant de la formation, ait été le plus petit qui puisse résulter de la réunion d'un nombre impair de molécules cubiques, auquel cas il devait être composé de 27 de ces molécules. Par une suite nécessaire, chacune de ses faces, telle que *eoi* (fig. 156), renfermait neuf petits carrés, qui étaient les faces extérieures d'autant de molécules; et si nous supposons six nouvelles molécules, telles que *m*, appliquées une à une sur les carrés du milieu (1), nous

(1) On s'est borné ici à la projection des molécules additionnelles qui reposent sur trois des faces du noyau cubique.

aurons l'assortiment que représente la figure, et qui déjà offre l'effet initial du décroissement par une rangée sur les bords.

Pendant l'instant suivant, de nouvelles molécules s'étant arrangées autour du dodécaèdre déjà formé, l'assortiment s'est changé en celui que l'on voit (fig. 157), où les faces du noyau devenu plus volumineux, se trouvent de niveau avec les facettes extérieures des molécules *m* (fig. 156), en sorte que ce noyau est alors un assemblage de cent vingt-cinq molécules, et que chacune de ses faces, telle que *eoi*, renferme vingt-cinq carrés. De plus, les mêmes molécules ont produit deux lames de superposition, dont l'une est composée de neuf cubes *n*, *r*, *s*, *t*, *u*, etc., et l'autre se réduit à un simple cube *m*.

En appliquant le même raisonnement à ce qui s'est passé pendant le troisième instant, et dont le résultat est représenté (fig. 158), on en conclura que le noyau se trouve alors être un assemblage de trois cent quarante-trois molécules, ce qui donne quarante-neuf carrés pour chaque face, telle que *eoi*; et que la partie correspondante de la matière enveloppante contient trois lames de superposition, composées, la première de vingt-cinq cubes, la seconde, de neuf cubes, et la dernière d'un seul cube.

Ainsi, dans le passage d'un terme au suivant, la

Il est facile d'ajouter par la pensée celles qui se sont appliquées sur les trois autres faces.

première lame de superposition s'engage, comme partie intégrante, dans le noyau qui répond à ce terme; chacune des autres lames s'accroît par l'addition d'une rangée de molécules sur chacun de ses bords, et au-dessus de celle qui était la dernière, il s'en forme une nouvelle qui en prend le nom, et qui, dans l'exemple que nous venons de citer, se réduit à un simple cube.

191. Au-delà du terme que nous avons considéré en dernier lieu, il en existe une multitude d'autres qui répondent à divers degrés successifs de l'accroissement, de manière qu'en partant du cristal naissant, les nombres des arêtes de molécule comprises dans chaque bord du noyau, ceux des carrés que renferme chacune de ses faces, et ceux des cubes dont se compose sa solidité, forment trois séries, l'une des nombres naturels impairs, en prenant trois pour le premier, la seconde des carrés de ces nombres, et la troisième de leurs cubes. J'ai décrit plus haut le dodécaèdre qui répond au terme où chaque bord du noyau est égal à dix-sept arêtes de molécule, et dont la forme est représentée (fig. 70, pl. 5).

Quoiqu'il soit impossible de connaître le nombre absolu des molécules dont tel dodécaèdre est l'assemblage, on sait du moins que ce nombre est un des termes d'une autre série, que j'ai donnée au même endroit, et de laquelle j'ai déduit une formule générale qui exprime le nombre dont il s'agit, en fonction de la quantité C par laquelle je désigne le

rier les époques auxquelles les différens
dont les molécules sont suspendues dans u
masse de liquide prennent naissance, et l
de leurs accroissemens. Il en résulte qu'à l'i
s'arrête la formation de chacun d'eux, ses d
sont renfermées entre des limites d'autant pl
ou plus étendues, que le terme auquel n
instant se rapproche ou s'éloigne davantag
auquel commence la série qui représente l
progressive de l'augmentation de volume
forme reste constamment la même au milie
traste des dimensions.

192. Je choisirai pour second exemple
caèdre à plans pentagones qui dérive aussi d
cubique, en vertu de deux décroissemens
deux rangées en largeur parallèlement à d
opposés sur chaque face du noyau, l'autre
rangées en hauteur parallèlement aux de
bords. Soit EOI (fig. 159) la face supérieu
noyau qui était renfermé dans le dodécaèdr

tandis que vers les deux autres bords, elles se dépasseront mutuellement d'une quantité égale à deux rangées *ki*, *sr*, de molécules. Si, de plus, nous supposons que la seconde lame *mn* soit composée d'une simple rangée, pour que le nombre des molécules élémentaires soit le plus petit possible, il suffira de considérer que chaque bord du noyau, tel que OE, ne peut pas renfermer moins de neuf arêtes de molécule, dont deux répondront aux deux rangées qui restent à vide vers le bord OI, les deux suivantes à la distance entre la première lame et la seconde, la cinquième à la rangée *mn*, prise dans le sens de sa largeur, et les quatre autres aux dimensions mesurées par les quatre premières.

Par une suite de cet arrangement, le noyau sera composé de 729 molécules, la première lame de 35, et la seconde de 7. Il est, de plus, évident que chaque face du noyau renfermera 20 carrés, qui seront les facettes extérieures d'autant de molécules.

Il sera facile de se faire une idée de la marche de l'accroissement pendant les instans suivans, en appliquant ici le raisonnement que nous avons fait à l'égard du dodécaèdre à plans rhombes.

193. Il existe dans les deux variétés que nous venons de considérer, et dans plusieurs de celles qui appartiennent à diverses substances, une corrélation remarquable entre l'ordre de l'accroissement et celui de la structure. Pour concevoir en quoi elle consiste reprenons le dodécaèdre à plans rhombes représenté

194. Les formes secondaires susceptibles de se prêter à la même considération sont surtout celles où les lames de superposition appliquées sur les différentes faces du noyau, décroissent de manière que les parties de la matière enveloppante composées de leurs assemblages se terminent en sommet pyramidal. C'est ce qui a lieu spécialement dans le dodécaèdre métastatique, dont nous allons déterminer la forme initiale, uniquement d'après l'ordre de la structure.

Reprenons la fig. 81, pl. 6, qui représente l'effet de la loi d'où dépend la forme de ce dodécaèdre, et qui a lieu, comme nous l'avons dit, par des soustractions de deux rangées en largeur sur les bords inférieurs du rhomboïde primitif. La réunion des trois avant-dernières lames de superposition peut être considérée comme faisant partie d'un rhomboïde d, engagé par le bas dans la matière qui recouvre la forme primitive, et dont chaque face contient neuf petits rhombes qui sont les facettes extérieures d'autant de molécules, d'où il suit que le nombre de celles dont il est l'assemblage est de 81 (1). De plus, les trois dernières lames de superposition forment, ainsi que nous l'avons expliqué, un autre rhomboïde plus petit h, et évidé par la soustraction d'un des huit rhomboïdes

(1) Les trois lames dont nous considérons ici la réunion sont censées n'en faire qu'une, parce qu'elles sont placées à la même hauteur sur les faces du noyau situées vers un même sommet.

[redacted] complet, c'est dans [redacted] à arête terminale du rhom- [redacted] ce rhomboïde, en lais- [redacted] les sept petits rhomboïdes [redacted] supérieur, et suppposons [redacted] la répétition du même accès- [redacted] la symétrie de la forme. Nous [redacted] un dodecaèdre naissant, dont le [redacted] rhomboïde *d*, sur lequel s'appli- [redacted] de superposition, disposées trois à [redacted] sommets, sous l'aspect de deux as- [redacted] sept petits rhomboïdes.

[redacted] dans le dodécaèdre le rhomboïde *f*, [redacted] nouveau; chacune de ses faces pou- [redacted] sera subdivisée en 16 petits rhombes, le nombre [redacted] de molécules composantes sera de 64. L'effet du [redacted] restant *stable*, les trois lames qui [redacted] cette partie du noyau précédent dé- [redacted] se multiplieront de nouveau et deviendront les [redacted] de superposition appliquées sur [redacted] du noyau. Les molécules du [redacted] recommencent de se partager entre les [redacted] dont le nombre fait que reculer d'un rang. [redacted] pour obtenir les termes suivans [redacted], d'où l'on voit que [redacted] cette exposition encore ici celui de l'ac- [redacted]

[redacted] que j'ai citées comme exemples de [redacted] l'ordre accroissement s'accorde avec la

structure, ont été choisies parmi celles qui résultent d'une seule loi de décroissement, parce que leur simplicité rend cet accord plus facile à saisir. Il est évident qu'il se soutient dans les formes produites par la combinaison de plusieurs lois simultanées de décroissement, dont l'effet initial est représenté par un petit solide composé d'un nombre de molécules qui s'éloigne plus ou moins de ceux qu'ont donnés les formes simples, à proportion que les facettes qui terminent celles dont il est l'élément sont plus ou moins diversifiées. Il nous suffit d'avoir tracé en général la route qui, dans tous les cas, conduit la cristallisation à son but, et la théorie qui suppose la chose faite, ne gagnerait rien au travail plus ou moins compliqué qu'exigerait la détermination des petits solides dont je viens de parler.

Les observations directes que l'on peut faire sur les cristaux qui appartiennent à diverses substances viennent à l'appui de tout ce que j'ai dit de la manière dont s'opère l'accroissement de ces corps. Tels sont surtout certains cristaux de quartz prismé qui ont été brisés un peu au-dessus de la base d'une de leurs pyramides. La distinction des couches concentriques qui ont contribué successivement à l'augmentation de volume, se prononce sur la surface de la fracture par les différentes teintes, les unes blanchâtres, les autres grisâtres, qui s'offrent sous un aspect rubané semblable à celui qui fait l'ornement de certaines variétés de quartz-agathe. On trouve aussi de

[illegible] forme primitive dont la base [illegible] circonstances qui offrent [illegible]

[illegible] par un résumé de toutes les [illegible] précédemment. [illegible] nature le cristal en commençant par la molécule imperceptible à nos yeux, et [illegible] successivement suivre la forme [illegible] comme élément. J'accroît par [illegible] enveloppes qui, en se succédant [illegible] lui font subir les traits de la forme [illegible] dans les cavités de la Terre, le cristal [illegible] comme engendré d'un noyau dont les dimensions sont imperceptibles aux sens, et la [illegible] autour de ce noyau est un assemblage de lames planes appliquées les unes sur les autres, et [illegible] l'effet complet de la loi dont l'existence [illegible] dans l'embryon que la cristallisation a fait naître dès le premier instant. Ainsi, l'operation de la nature a son origine au centre du cristal, et la théorie suppose qu'elle part de la surface du noyau, parce que notre esprit s'accommode d'autant mieux de cette manière de voir, que c'est d'elle que procèdent les vrais principes de la théorie, dont le but [illegible] d'appliquer notre géométrie à celle de la nature. Nous ne parcourons que la partie la plus accessible [illegible] pour nous de la route que la cristallisation franchit entièrement tout entière. Le point essentiel est [illegible] la théorie et la cristallisation finissent par se

rencontrer, et par se trouver d'accord l'une avec l'autre.

De la cause physique des lois de décroissement.

197. Le point de vue auquel j'ai ramené la théorie des formes cristallines est purement géométrique, et se réduit à nous les montrer comme les résultats des diverses manières dont se combinent les molécules intégrantes, en s'arrangeant symétriquement autour de la forme primitive. Mais il resterait un grand pas à faire pour remonter des lois de la structure à celles de la cristallisation, et compléter ainsi la théorie dont je viens de parler, en la considérant sous le point de vue de la Physique. On expliquerait alors comment, dans tel cas, le noyau s'accroît en conservant sa forme; comment, dans tel autre cas, les lames qui le recouvrent décroissent soit vers leurs bords, soit vers leurs angles; comment ces décroissemens suivent une marche tantôt plus lente et tantôt plus rapide, et ainsi des autres effets qui font varier les formes des cristaux.

Mais nos connaissances ne sont pas à beaucoup près assez avancées pour se prêter à la solution de ces sortes de problèmes, où il serait nécessaire d'appliquer le calcul aux lois suivant lesquelles agit l'affinité, combinées avec l'attraction du liquide environnant et avec les formes des molécules. Je me permettrai ici de hasarder une explication qui ne peut passer que pour une légère ébauche, en partant

de ce que l'observation nous laisse entrevoir des véritables données du problème, à travers l'ordre de la structure et l'action générale des causes qui en dirigent la marche.

198. Lorsque les molécules intégrantes d'un minéral, suspendues dans un liquide, tendent à se réunir pour former des cristaux, ces molécules, en même temps qu'elles sont sollicitées par leur attraction mutuelle, ont à vaincre celle du liquide qui agit pour les retenir, en sorte que la force qui opère leur réunion, est mesurée par l'excès de leur attraction mutuelle sur celle du liquide.

Or, la première de ces attractions est une force constante, puisque les molécules ne sont susceptibles d'éprouver aucun changement. Mais l'attraction que le liquide exerce sur celles-ci varie en raison de la qualité de ce liquide, de sa densité, de sa température, et autres circonstances, d'où il suit que la différence entre cette attraction et celle qui est réciproque entre les molécules, est elle-même une quantité variable; et il paraît que c'est en général à cette variation que l'on doit attribuer la diversité des formes cristallines sous lesquelles se présente une même substance minérale.

La cristallisation de la soude muriatée ou du sel [illegible] nous offre un exemple à l'appui de ce que [illegible]. Lorsqu'elle est dissoute dans l'eau [illegible] cristaux prennent la forme cubique, [illegible] primitive. Mais si l'on substitue l'u-

rine à l'eau, la forme sera celle de l'octaèdre régulier, qui résulte, comme nous l'avons vu, d'un décroissement par une rangée sur tous les angles du cube primitif.

Une autre cause de la variation dont il s'agit est l'influence des molécules étrangères suspendues dans le même liquide, et dont la force s'ajoute à celle de ce liquide, pour balancer en partie l'attraction mutuelle de la substance disposée à la cristallisation. J'ai cité, dans un autre article (1), divers exemples de cette influence.

199. Concevons maintenant des molécules que je supposerai, pour plus de simplicité, être d'une forme cubique, suspendues dans un liquide où toutes les circonstances soient favorables à la cristallisation. Imaginons que vingt-sept d'entre elles se soient déjà réunies autour d'un centre commun, pour composer un petit noyau cubique AFGLC′ (fig. 160), dont chaque face contiendra par conséquent neuf carrés. Parmi toutes les molécules environnantes qui tendent vers ce noyau, il y en aura neuf qui s'approcheront les unes des autres pour former une lame carrée, une espèce d'assise qui s'appliquera sur la face du noyau dont elle est voisine, si rien ne s'y oppose. Concevons de plus qu'étant tournées les unes vers les autres par leurs *latus* d'affinité, elles n'aient plus que de petits espaces à franchir pour prendre de l'adhérence, soit

(1) De la coïncidence des lois de décroissement.

de ce qu
ritables d
structure
gent la m

198. L
néral, su
réunir po
même te
tion muti
pour les
réunion,
mutuelle

Or, la
constante
d'éprouve
le liquide
qualité de
ture, et au
rence entre
entre les m
riable; et il
tion que l'a
cristallines s
stance minér

La cristall
ordinaire, no
je viens de di
commune, ses
qui est sa forme

200. Il suit de là que l'action exercée par le liquide, pour s'opposer à la réunion des molécules des angles avec le noyau, est plus forte que celle qui a lieu à l'égard des molécules qui tendent vers le milieu des bords, et que cette dernière surpasse à son tour celle que le liquide exerce sur la molécule centrale.

Si l'attraction réciproque des molécules prévaut sur celle du liquide, quelles que soient les positions de ces molécules, le noyau s'accroîtra sans changer de forme. Mais si elle est plus faible que l'une de celles que le liquide exerce sur les molécules *ab*, *de*, il y aura un décroissement.

Représentons les diverses attractions par des nombres pris arbitrairement, et destinés seulement à aider nos conceptions. Soit l'attraction mutuelle des molécules égale à 9; celle d'un certain liquide sur la molécule centrale *pq* égale à 6; celle qui agit sur la molécule *de* et sur les autres semblablement situées égale à 8, et celle qui sollicite la molécule *ab* et ses analogues égale à 10. Les deux premières attractions 6 et 8, exercées par le liquide, étant plus faibles que l'attraction réciproque des molécules qui est 9, le liquide ne pourra empêcher la jonction soit de la molécule centrale, soit des molécules des bords avec le noyau; mais l'attraction du liquide sur les molécules des angles, qui est égale à 10, étant supérieure à l'attraction mutuelle des molécules, celles-ci, retenues par le liquide, resteront en retard, et il y aura un décroissement sur les angles.

[illegible] une autre hypothèse, et continuant [illegible] l'attraction réciproque des molécules, [illegible] par 8 celle du liquide sur la molécule cen- [illegible] par 10 celle qu'il exerce sur une molé- [illegible] bords, et par 12 celle qu'il exerce sur [illegible] *ab* des angles. Dans ce cas, les molé- [illegible] bords étant attirées par le liquide avec une [illegible] égale à 10, celle-ci l'emportera sur l'attraction [illegible] des molécules qui est égale à 9. Il y aura donc un décroissement sur les bords qui agira sur la rangée entière, parallèle à ces mêmes bords, attendu que les molécules des angles qui en font partie sont attirées encore plus fortement par le liquide.

Maintenant, si nous considérons que parmi plusieurs rangées situées les unes derrière les autres, et qui tendent vers le cristal naissant, celles de la première sont plus attirées par le centre d'action de ce cristal que celles de la seconde, et ces dernières plus que celles de la troisième rangée, nous pourrons encore entrevoir comment l'action modératrice du liquide, en se combinant avec ces différentes actions du centre, détermine des décroissemens tantôt par une rangée, tantôt par deux rangées ou davantage.

202. L'explication que je viens de donner ressemble à toutes les ébauches qui n'offrent que les premiers traits du dessin auquel se rapporte leur modèle. Inutilement tenterait-on de l'étendre à ces conflits de décroissemens, les uns directs, les autres intermédiaires, d'où naissent des facettes de différens

ordres qui exigent un œil exercé pour les démêler sur la surface de certaines variétés. Et ce que je dis ici doit en même temps nous faire sentir combien il y a loin de l'état actuel de la science à celui qui amènerait le moment où la solution du problème serait donnée par un géomètre dont l'habileté répondît à la délicatesse du sujet.

Considérations sur le tissu des faces qui terminent les formes secondaires.

Les projections géométriques que nous traçons pour représenter, par des séries de lames décroissantes disposées autour d'une forme primitive, la structure des variétés qui en dérivent (1), et les solides à l'aide desquels l'artiste met en relief ces imitations de la structure, ne font pour ainsi dire que substituer une maçonnerie grossière à l'architecture infiniment délicate de la cristallisation; mais ils ont l'avantage de rendre sensible à l'œil sa manière de travailler. Les parties extérieures des pyramides qui résultent d'un décroissement sur les bords y ressemblent à des escaliers, par les rentrées et saillies alternatives de leurs facettes latérales, et celles des pyramides produites en vertu d'un décroissement sur les angles, sont toutes hérissées d'angles solides trièdres. Mais dans l'ouvrage de la cristallisation, les lames de superposition n'ayant qu'une épaisseur presque infi-

(1) Telles sont celles que l'on voit fig. 70, 75 et 81.

nîment petite, par une suite de l'extrême ténuité des molécules dont elles sont les assemblages, la distance entre leurs arêtes saillantes, dans le premier cas, s'évanouit, en sorte qu'elles paraissent se toucher, et dans le second cas, les pointes qui les terminent disparaissent de même, en sorte que, dans les résultats des deux décroissemens, les faces des pyramides se présentent sous l'aspect de plans lisses et continus.

Ce que j'ai dit du niveau apparent des faces produites par des décroissemens soit sur les bords, soit sur les angles, n'est cependant vrai qu'autant que la cristallisation n'a pas été gênée dans sa marche. Mais si son travail n'a pas atteint tout le fini dont il est susceptible, et que le décroissement ait lieu, par exemple, sur les bords, les faces du cristal pourront être sillonnées par des stries alignées dans le sens des bords des lames composantes. C'est ce qui a lieu dans la plupart des dodécaèdres rhomboïdaux qui appartiennent à la substance que j'ai nommée *aplome*, et dont les faces sont striées parallèlement à leurs petites diagonales, ainsi que cela doit être, d'après la description que j'ai donnée plus haut de ces dodécaèdres. Dans les cristaux qui appartiennent à la variété de chaux carbonatée que j'ai appelée *métastatique*, et que représentent les figures 80 et 81, pl. 5 et 6, les [illegible] ont des directions parallèles aux bords inférieurs [illegible]IK, etc., du noyau, qui sont les lignes de décroissement par deux rangées d'où dérive [illegible] de cette variété. Les décroissemens sur les

angles par une simple rangée ne sont pas susceptibles de faire naître des stries sur les faces qui en résultent; mais s'il y a deux rangées ou plus de soustraites, l'augmentation de distance entre les bords des lames de superposition donne plus de jeu à la structure pour laisser des traces de sa marche. Les stries, dans ce cas, sont parallèles aux diagonales vers lesquelles se trouvent situés les angles qui subissent le décroissement.

On a objecté contre la manière dont j'ai considéré le tissu des faces qui terminent les cristaux secondaires, que s'il en était ainsi, ces faces, chargées d'inégalités produites par les angles saillans ou les angles solides des molécules, même dans le cas où les lois de décroissement auraient joui d'une parfaite liberté, ne pourraient jamais réfléchir assez régulièrement la lumière pour faire l'office de miroirs, ce qui serait contraire à l'observation. On peut répondre que l'objection, si elle était fondée, attaquerait l'existence de toute espèce de miroir. Suivant la remarque de Newton (1), on ne peut présumer que le travail de l'art, en employant le sable et d'autres matières analogues, réussisse tellement à polir le verre, que les dernières particules de cette substance deviennent parfaitement lisses, que leurs surfaces soient exactement planes ou sphériques, qu'elles se trouvent toutes

(1) *Optice lucis, Lausannæ et Genevæ, 1740, lib. 2, pars 3ª, propos. 8ª.*

tournées dans le même sens, et composent une surface unique, partout semblable à elle-même. Ce qu'on appelle polir le verre n'est autre chose que rendre imperceptibles pour nos yeux les aspérités qu'ils y apercevaient et les remplacer par d'autres aspérités plus petites. Il en résulte que si la lumière était réfléchie par les parties propres du verre, elle se disperserait de tous côtés sur les surfaces polies avec le plus de soin, comme sur les plus raboteuses. C'est ce qui a fait penser à l'illustre géomètre anglais que la réflexion dépendait d'une certaine force répandue uniformément sur toute la surface du verre, et dont l'action s'exerce à une très petite distance, comme celle qui produit la réfraction. Or, on conçoit encore mieux la symétrie avec laquelle agit cette action, lorsqu'elle est secondée dans un cristal par les figures régulières des particules dont elle émane, et par la disposition pour ainsi dire compassée qui règne entre elles.

Des joints surnuméraires.

203. Lorsqu'on examine attentivement les fractures faites à un cristal, on y aperçoit quelquefois des joints qui diffèrent par leurs directions de ceux qui ont servi à déterminer les formes des molécules intégrantes. De plus, ces joints que j'appellerai désormais *joints surnuméraires*, sont toujours situés parallèlement à des faces susceptibles d'être produites par des lois de décroissemens. Je prendrai pour

exemple la chaux carbonatée dont le rhomboïde est représenté (fig. 162), parce que c'est le minéral qui a donné lieu au plus grand nombre d'observations du genre de celles dont il s'agit. On trouve en Norwège près d'Arendal, en France près de Pesé, département du Mont-Blanc, et ailleurs, de ces rhomboïdes qui offrent assez nettement des joints surnuméraires suivant trois plans, dont chacun passe par les diagonales horizontales de deux faces opposées, savoir, *bd* et *gn*, *df* et *gm*, *bf* et *mn*, et l'on concevra, avec un peu d'attention, que ces plans sont parallèles à des faces qui résulteraient d'autant de décroissemens par une rangée sur les bords supérieurs *af* et *a'm*, *ab* et *a'n*, *ad* et *a'g*, c'est-à-dire qu'ils sont parallèles aux faces du rhomboïde équiaxe originaire de celui que représente la figure. Dans d'autres rhomboïdes et quelquefois dans les mêmes, on aperçoit des joints surnuméraires situés parallèlement aux bords inférieurs *bm*, *dm*, *dn*, etc., et en même temps à l'axe, d'où il suit qu'ils sont aussi parallèles à des faces qui naîtraient d'un décroissement par une rangée sur les mêmes bords, et produiraient la surface latérale d'un prisme hexaèdre régulier. Dans les variétés secondaires, les joints surnuméraires se montrent de préférence parallèlement aux faces produites par les décroissemens d'où dépendent ces variétés, et quelques minéralogistes ont pensé que les cristaux dont les formes étaient les plus composées renfermaient des joints parallèles à toutes les différentes faces qui terminaient

Les variétés relatives à diverses autres
donne les résultats analogues
ai dû me borner. Je remarquerai qu'en
joints surnuméraires augmente des varia-
augmente aussi la facilité de les
trouve souvent un et un distinctement
sur une face qui augmente la symétrie, et
ne se trouvent pas toujours.
Le plus remarquable de ces phénomènes, dont il vient d'être question, est celui que présentent les cristaux, dans lesquels le rhomboïde primitif est remplacé par des joints surnuméraires parallèles à l'une, ou parallèles à des lignes qui joignent les sommets d'une rangée horizontale. Ces joints sont surtout apparens dans les cristaux auxquels on a donné les noms de rubis, et même ils y sont ordinairement plus nets et plus éclatans que les joints naturels aux faces du rhomboïde *primitif* qui sont souvent très sensiblement en retraite. C'est encore dans les cristaux de cette dernière espèce, dont le tissu est très peu serré et très facilement à la division mécanique, que les joints parallèles aux faces du rhomboïde ne se montrent que faiblement dans ceux dont j'ai parlé. Ces variétés se trouvent dans d'autres substances que l'on doit regarder comme étrangères. Il est vraisem-

blable que parmi ces causes une des principales est l'influence des principes colorans et autres matières étrangères. J'ai observé plusieurs fois une couche légère d'une de ces matières interposée dans un cristal transparent, et qui suivait la direction d'un joint surnuméraire.

Mais c'est surtout la multiplicité de ces sortes de joints dans les cristaux calcaires, où l'on a supposé qu'ils passaient réellement à travers les molécules adoptées par la théorie, qui a donné lieu aux objections dont on s'est prévalu pour attaquer l'existence de ces molécules, et regarder les lois d'arrangement que la théorie leur assignait comme n'étant qu'idéales.

Je vais prouver que la difficulté n'est qu'apparente, que ceux qui l'ont imaginée n'en ont pas dit assez à beaucoup près, et que néanmoins les observations qui lui ont donné naissance n'altèrent point la simplicité de la structure, et laissent subsister dans toute leur étendue les résultats de la théorie.

205. Dans l'exposé que nous faisons de certains phénomènes naturels nous employons les mots de *contact immédiat* entre les molécules des corps; nous regardons les surfaces de ces corps comme des plans continus, parce que nous sommes portés à juger des choses prises en elles-mêmes, d'après la manière dont elles s'offrent à nos observations. Mais lorsque nous réfléchissons sur la transparence des corps, nous concevons que les rayons de la lumière doivent traverser suivant toutes les directions les corps qui jouissent

ces formes. Les variétés relatives à [illegible]
espèces ont donné des résultats anal[illegible]

204. Avant d'aller plus loin, j[illegible] entre
général les joints surnuméraire[illegible] consi-
tions par rapport à leur nomb[illegible] toutes
apercevoir. Assez souvent o[illegible] analogie
qu'un ou deux sur trois qu[illegible] aques, re-
ainsi de ceux qui sont plu[illegible] cules. Les

Un des résultats d'obse[illegible] rie immense
bles parmi ceux dont il [illegible] en partant
sentent les cristaux de [illegible] a prouvé que
rhomboïde primitif est u[illegible] que pouvait
méraires perpendicul[illegible] ce de la gravi-
faces produites par [illegible]
autour des sommets, [illegible] rticules réfléchis-
dans les cristaux d[illegible] ssent agir sur la
noms de *saphir* [illegible] ent, parce que les
nairement plus [illegible] que considérables
naturels paral[illegible] s yeux.
que l'on aper[illegible] u découlent des con-
éclairant les f[illegible] apport à la structure
appelés *corun*[illegible] 53), une section faite
lamelleux et [illegible] lélement à l'un des
mécanique, [illegible] agnons cet espace sous-
de la forme [illegible] petits espaces qui soient
ment les joi[illegible] de plus qu'un certain
riations, qu[illegible] occupés par des molé-
stances mine[illegible] la même figure, et que
considérer co[illegible] ent vides. Ici, les molé-

...nière qu'entre chacune et la
...spaces vides, ce qui est bien
...té.

...n fait passer par les points *f*, *i*,
...culaire à la surface ABCD, ce plan
...ne face produite en vertu d'un dé-
...r une rangée sur l'arête qui passe par
...ur soit A′B′C′D′ (fig. 161), une section
...BCD (fig. 163), mais dans laquelle tous
...spaces qui la sous-divisent soient réelle-
...upés par les coupes d'autant de molécules.
...ns un décroissement par une rangée sur
...contiguë au point A′. La coupe de la première
...de superposition appliquée sur la face adjacente
...rête A′D′ sera le rectangle de *bce*D′; celle de la
...ivante sera le rectangle *rnue*, celle de la troisième
le rectangle *xtyu*, et ainsi des autres; d'où il suit que la face produite sera dirigée suivant A′*g*′. Or, si l'on suppose que les plans qui terminent les deux espaces cubiques soient respectivement parallèles, il est évident que A′*g*′ sera de même parallèle à *fi* (fig. 163). Il n'est pas moins clair que le plan dirigé suivant *fi* n'entaînera aucune des molécules *m*, *s*, *y*, etc, et parce que dans la matière surajoutée au noyau que représente l'espace cubique B′D′ (fig. 164), par l'effet du décroissement, les vides qui restent entre les molécules voisines et entre les bords des différentes rangées successives, n'empêchent pas que les faces produites en vertu du décroissement ne nous paraissent

[redacted]

[redacted] *fi* (*fig.* 163), mis à [redacted] pourra s'offrir sous l'as- [redacted] avec la même apparence de [redacted]

[redacted] *fi* ou autre plan dont la di- [redacted] parallèle à une face située dans [redacted] (*fig.* 161), et produite en vertu d'un [redacted] ux rangées sur la même arête, [redacted] faire bien juger par l'inspection des [redacted] *λδγα*, qui représentent les [redacted] premières lames de superposition. Il [redacted] dans l'intérieur de l'espace indiqué [redacted] (*fig.* 163), un joint naturel dirigé sui- [redacted] ne traversera aucune molécule. Un [redacted] dans le sens de *fg*, sera paral- [redacted] en vertu d'un décroissement [redacted] sur la même arête, et en écartant [redacted] on aurait des plans paral- [redacted] les résultats d'un décrois- [redacted] ains, et ainsi presque [redacted] difficulté est résolue avec [redacted]

[redacted] la véritable cause des [redacted]. On a prétendu [redacted] dans des directions [redacted] comme primitives. [redacted] elle un fait géné- [redacted] la molécule dans laquelle [redacted] substance minérale

est nécessairement une. Or, si tous les joints surnuméraires traversent, par exemple, le rhomboïde de la chaux carbonatée, le voilà morcelé et pour ainsi dire haché en un si grand nombre de fragmens de diverses figures plus ou moins irrégulières, qu'une pareille complication est l'extrême opposé à l'unité de molécule.

Un autre fait également opposé à la même opinion, c'est l'existence des stries qui sillonnent la surface d'une multitude de cristaux. Si les joints surnuméraires traversent dans tous les sens la matière propre des corps, un cristal n'est plus autre chose qu'un solide taillé par la cristallisation suivant des plans qui se confondent avec les mêmes joints. Il n'y a plus alors de décroissemens, et chaque face étant le résultat d'une coupe naturelle, doit être unie et sans inégalités, au moins du genre de celles dont il s'agit. Cependant il n'en est pas ainsi, et même les stries que l'on observe sur les cristaux sont dans le sens par lesquels les lames que j'appelle *de superposition* décroissent en perdant une ou plusieurs rangées de molécules. Ces stries ne seront, si l'on veut, que des accidens qui ont lieu dans les cas où la continuité des décroissemens a subi de petites interruptions. Mais il n'en est pas moins vrai qu'elles servent à déceler la marche de la structure, qu'elles la retracent à nos yeux d'une manière pour ainsi dire ébauchée, et qu'elles confirment l'idée d'une succession de lames disposées comme en recouvrement

...partie fonda-
...nstallisation.
...imaginé, suivant
...ertu es seraient les
...ui lui appartien-
...stal en réalité n'en
...ar tout ce qui pré-
...objections qu'a fait
...unts, dont la Physique
...reuse, et qui laisse à la
...ntesse et la certitude de ses

...*lois de décroissement.*

...ieloppement de la théorie
...qu précèdent, à quoi tient
...metamorphoses que produit la
...ent les décroissemens ont lieu à la
...du solide primitif, comme dans
...rhombes originaire du cube, ou
...mme dans l'octaèdre régulier
...yau. Tantôt ils ont lieu seu-
...ords, comme dans la chaux car-
...ou sur certains angles, comme
...erse qui appartient à la même
...que les résultats des lois soli-
...e tant de manières les formes
...ce minéral, chacun d'eux est
...se multiplier dans un rapport

considérable par la diversité de ses combinaisons binaires, ternaires, etc., avec ceux des autres lois, ce qui donne quelquefois naissance à des formes très composées, et propres à déconcerter l'œil de celui qui n'a point le secours de la théorie pour débrouiller cette complication apparente. Les deux formes, dont l'une offre le *maximum* du nombre de lois, et l'autre celui du nombre de faces observées jusqu'ici, sont celles de l'épidote dodécanome et du fer sulfuré parallélique.

La première résulte de douze lois simultanées de décroissement, et le nombre de ses faces est de quarante-quatre. La seconde a cent trente-quatre faces, produites par sept lois de décroissement. La différence dans le rapport entre le nombre des faces et celui des lois qui leur donnent naissance, provient de la loi de symétrie, qui exige la répétition des mêmes effets sur tous les bords ou sur tous les angles du cube, qui est la forme primitive du fer sulfuré, au lieu que celle de l'épidote, qui est un prisme droit irrégulier, n'ayant ses bords et ses angles identiques que quatre à quatre, cette circonstance restreint entre des limites plus étroites le nombre des faces produites même en vertu d'un concours plus nombreux de décroissemens. De là vient qu'en général les formes les plus composées existent dans des espèces dont le noyau est un des polyèdres réguliers de la Géométrie.

209. Si au milieu de cette diversité de lois tantôt solitaires, tantôt comme groupées autour d'une même

[illegible] jusqu'à un certa
[illegible] recule à la tendance qu'elle a en
[illegible] Le plus souvent les soustra
[illegible] deux rangées, quelquefois
[illegible] par quatre, plus rarement par cinq o
[illegible] ces, elles agissent par d
[illegible] nombres entrent dans l'ex
[illegible] mixte, qui est toujours
[illegible] l'un des deux termes, ou
[illegible] unité, soit en plus, soit en moins
[illegible] d'un décroissement ordinaire; ce
[illegible] peuvent être considérés comme d
[illegible] que sont les lois de décroisse
[illegible] moyen pris parmi les pl
[illegible] intermédiai

[illegible] jusqu'à quel

quels les nombres de rangées soustraites sont quelquefois assez compliqués, on peut toujours, ainsi que je l'ai prouvé, les envisager sous un autre point de vue qui les ramène à la simplicité des décroissemens ordinaires.

210. Cependant, telle est la fécondité qui s'allie avec cette simplicité, que si l'on se borne à considérer les décroissemens les plus ordinaires par une, deux, trois et quatre rangées, soit sur les bords, soit sur les angles d'un rhomboïde, le nombre des formes que les combinaisons de ces décroissemens pris un à un, deux à deux, trois à trois, etc., seront susceptibles de produire, est de huit millions trois cent quatre-vingt-huit mille six cent quatre. Encore obtient-on ce résultat en n'ayant égard aux décroissemens en hauteur que par rapport à l'angle inférieur du rhomboïde primitif. Si l'on fait abstraction des autres, dont les cas sont très rares, on n'a plus à considérer que six espèces de décroissemens, qui, étant susceptibles chacune de 4 variations seulement, fournissent 24 quantités, auxquelles il faut en ajouter une 25e, pour le cas où le cristal secondaire a des faces parallèles à celles du noyau. Mais on doit remarquer que l'effet des décroissemens par une simple rangée sur l'angle inférieur est le même dans le sens de la largeur et dans celui de la hauteur, et que de plus il se confond avec celui du décroissement par une rangée sur les angles latéraux. Il ne reste donc plus que 23 quantités, qu'il faut combiner une à une,

ane

elles qui

rangée sur

ngée sur les

deux rangées

mmer décrois-

et les deux

peuvent exister

ours d'un autre

mbinaisons une à

antités, est en gé-

ur $m=23$, et que

a aura pour le nombre

$-4=8.388.604$,

$$\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2 + \text{etc.},$$

n du premier qui est l'unite,

binaisons possibles de m

une à une deux à deux, etc.,

rentièrement distinctes. Donc

moins l'unite, représente le

nbinaisons une à une, deux à deux, etc.,

ce nombre binome la quan-

ne sera pas distinguée de

ombre de toutes les combi-

-1 ou 2^m-1.

211. On obtiendrait un résultat incomparablement plus fort, en faisant entrer dans le calcul les décroissemens dont il y a des exemples parmi ceux qui répondent aux termes suivans de la série des nombres naturels, et en y admettant les résultats des lois mixtes et intermédiaires. Au reste, il s'en faut de beaucoup sans doute que tout ce qui peut exister, même dans l'hypothèse des décroissemens les plus ordinaires, existe réellement; et ces résultats, qui ont paru effrayans à quelques personnes, n'ont pour but au contraire que de prouver la possibilité d'expliquer toutes les nouvelles formes cristallines, quelles qu'elles soient, qui pourront s'offrir un jour à nos observations.

Des signes représentatifs des Cristaux.

212. Les rapports qui servent à lier les différens cristaux originaires d'une même substance avec une forme primitive commune sont fondés, ainsi que nous l'avons vu, sur des lois de structure, dont l'effet est de déterminer le nombre et l'assortiment des plans qui composent la surface de chaque cristal. Par une suite nécessaire, le naturaliste qui s'est familiarisé avec la marche de ces lois, n'a souvent besoin que d'avoir sous les yeux la forme primitive et l'exposé des décroissemens que subissent ses angles ou ses arêtes pour se représenter le polyèdre qui en résulte, et voir en quelque sorte, par la pensée, s'opérer métamorphose du noyau dont ce polyèdre dérive.

l'angle s
arêtes in
sur l'angl
sement d
autres de
solitairem
décroiss
Maint
une, de
néral p
l'on rel
de tou
comm

(1) l

(a-

les div
représ
quanti

me d'un coup-d'œil la diversité des détails et
te de l'ensemble.

3. Supposons que la fig. 165 représente un pa-
lelepipède obliquangle dont les faces aient des an-
de différentes mesures, et qui soit la forme pri-
ve d'une espèce particulière de minéral, telle que
eld-spath (1).

Ayant adopté les voyelles pour désigner en géné-
les angles solides, placez les quatre premières A,
, O, aux quatre angles de la base supérieure, en
vant l'ordre alphabétique et en même temps celui
l'écriture ordinaire, qui est de commencer par le
ut et d'aller de gauche à droite; *voyez* la fig. 166,
les alignemens des lettres sont rendus sensibles à
œil.

Ayant adopté les consonnes pour distinguer en général les arêtes, placez, d'après la même règle, les six premières B, C, D, F, G, H, sur les milieux des côtés de la base supérieure (fig. 165), et sur les deux arêtes longitudinales de la face latérale qui se présente la première, de gauche à droite.

Enfin, placez sur les milieux de la base supérieure et des deux faces latérales situées en avant, les trois lettres P, M, T, qui sont les initiales des syllabes dont est formé le mot *primitif*.

---

(1) Le parallélépipède est censé être représenté de manière que l'angle BAC, qui est le plus éloigné de l'observateur, soit un des angles obtus de la base supérieure.

Ces co… …ides, ou des six bords
duire, d… …ceptible, dans le cas
de l'anal… …ière du parallé-
détermi… …de décroisse-
ainsi d… …parallélépipède.
même… …solides diamétra-
gner j… …voir qu'il y a
prim… …composent, pris
chiffr… …et sru; 2°. entre
subs… …. Il en résulte que
est t… …ssent trois à trois
ran… …n'y en a que deux
en… …. IAE, comme étant
cet… …parallélogramme; mais l'an-
… …angle IAr, et l'angle
q… …les angles solides I, s,
f… …aux égaux deux à deux;
l… …qui forment les angles
s… …AIO et AEO qui soient
a… …solide O, étant dans un
… …trouve l'angle solide A,
e… …ra à l'égard des angles
co… …angles est, relativement
un… …pendant de celui qui
con… …. Enfin les arêtes C et D,
tive… …comparées chacune à cha-
ages… …le même cas, parce
de dist… …reconnaissent sur l'une ne
sera pa… …angle que ceux qui ont

l'autre pour ligne de jonction. C'est entre ces mêmes arêtes et celles qui leur sont diamétralement opposées, par exemple entre AI et *ps* (fig. 167), entre AE et *pu*, etc., qu'il y a égalité parfaite.

214. On voit par là pourquoi les quatre angles solides autour de la base supérieure, ainsi que les quatre bords de cette base et les deux bords longitudinaux qui se présentent en avant, sont marqués chacun d'une lettre particulière. Mais comme les lois de décroissement agissent avec la plus grande symétrie possible, du moins pour l'ordinaire, tout ce qui a lieu sur un des angles solides ou des bords désignés se répète sur l'angle ou le bord diamétralement opposé, parmi ceux qui sont restés à vide. D'après cela, il n'était nécessaire que de désigner le nombre d'angles solides ou d'arêtes qui subissent des décroissemens réellement distincts, parce que ces décroissemens renferment implicitement ceux qui ont lieu sur les angles ou les bords analogues. On voit que les indications des bords et des angles du parallélépipède sont assorties à la loi de symétrie, et le même accord se retrouvera dans les notations de toutes les autres espèces de formes primitives.

On est cependant quelquefois obligé d'indiquer aussi les angles et les bords qui sont restés à vide sur la fig. 165. Alors on se servira des petites lettres qui portent les mêmes noms que les lettres majuscules employées sur la même figure, c'est-à-dire que *p* (fig. 167) sera désigné par *a*, *sp* par *c*, *pu* par *b*, etc. Mais il ne sera

[illegible] 3, 4, etc., [illegible] un instant; et [illegible]ssemens par de [illegible], on prendra les fr [illegible]

[illegible] M. T, serviront à dés [illegible] sans aucune modificati [illegible]ront seules le signe du cri [illegible] ent parallèles à celles d [illegible] décroissemens n'atteindr [illegible] ors ces lettres seront combi [illegible]stral avec celles qui auront ra [illegible] ords sur lesquels les décr [illegible]

[illegible]ons d'abord, pour plus grand [illegible]ngles solides tels que O s [illegible]e facette additionnelle. L [illegible] rapporte la production [illegible], soit sur la base P,

nera au chiffre la place d'un exposant ordinaire, à la droite et vers le haut de la lettre; et l'on indiquera le troisième cas en plaçant le chiffre à la gauche et de même vers le haut de la lettre.

Ainsi $\dot{O}$ exprimera l'effet d'un décroissement par deux rangées en largeur, parallèlement à la diagonale de la base P, qui passe par l'angle E; O^3 l'effet d'un décroissement par trois rangées en largeur, parallèlement à la diagonale de la face T, qui passe par l'angle I, et ^4O l'effet d'un décroissement par quatre rangées, parallèlement à la diagonale de la face M, qui passe par l'angle E.

Lorsque le décroissement a rapport à quelqu'un des trois autres angles solides I, A, E, l'observateur est censé tourner autour du cristal jusqu'à ce qu'il se trouve placé vis-à-vis de cet angle, comme il l'était naturellement vis-à-vis de l'angle O, dans le cas dont nous venons de parler; ou, ce qui revient au même, il est censé faire tourner le cristal jusqu'à ce que l'angle solide qu'il considère se trouve en face de lui; et c'est relativement à cette position que tel décroissement est dit avoir lieu vers la droite ou vers la gauche.

Par exemple, s'il s'agit de l'angle solide A, le signe A^2 représentera l'effet d'un décroissement par deux rangées sur la face AE*sr* (fig. 167), ou sur celle qui est opposée à T (fig. 165), et ^3A représentera l'effet d'un décroissement par trois rangées sur la face AI*ur* (fig. 167), ou sur celle qui est opposée à M

que rarement néces
tres sur la figure ; il
signe du cristal, par
la pensée chacune d

215. Pour indiqu
une, deux, trois r
on emploiera les c
nière qui sera exp
diquer les effets d
rangees, etc., en l
$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc.

Les trois lettres
la forme du noyau
qu'elles composero
les faces qui serai
dans le cas où les
leur limite, et alor
le signe du cristal
angles ou aux bor
agiront.

216. Supposons
cité, qu'un des ang
cepté par une seule
sement auquel on r
facette peut avoir lie
pan T qui est à la dr
pan M situé à sa gauc

Dans le premier cas,
teur en dessus de la lett

exprime un qui est ascendant sur la base supérieure P. Par la même raison *c* exprimerait un décroissement par trois rangées, en allant de *sp* (fig. 167) vers EO.

Si le même angle solide ou la même arête subit plusieurs décroissemens successifs du même côté, ou plusieurs décroissemens qui aient lieu de différens côtés, on répétera autant de fois la lettre indicative, en faisant varier les chiffres conformément à la diversité des décroissemens. Ainsi $\overset{2}{\dot{D}}\,\underset{3}{D}$ désignera deux décroissemens sur l'arête D, l'un par deux rangées en montant sur la base P, l'autre par trois rangées en descendant sur la face M. $^{2}H\,^{4}H$ désignera deux décroissemens, l'un par deux rangées, l'autre par quatre, à la gauche de l'arête H, etc.

S'il y a des décroissemens mixtes, on les indiquera d'après les mêmes principes, en employant les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, etc., qui les représentent, et dont le numérateur se rapporte au décroissement en largeur, et le dénominateur au décroissement en hauteur.

219. Reste à trouver une manière de représenter les décroissemens intermédiaires. Un exemple fera concevoir celle que nous avons adoptée. Soit AEOI (fig. 168) la même face que figure 165. Supposons un décroissement par une rangée de molécules doubles, suivant des lignes parallèles à *xy* (fig. 168), de manière que O*y* mesure des lignes doubles d'une arête de molécule, et O*x* des lignes simplement égales

successivement à l'œil, puis de passer aux faces du sommet ou de la pyramide. Ceci s'éclaircira par les divers exemples que nous citerons dans le cours de cet article.

Supposons maintenant que la fig. 169 représente la variété de feld-spath nommée *bibinaire*, dont la forme primitive se voit fig. 165. Dans cette variété, le pan *l* (fig. 169) résulte d'un décroissement par deux rangées sur l'arête G (fig. 165), en allant vers H; le pan M (fig. 169) répond à celui qui est marqué de la même lettre (fig 165), et qui n'est caché qu'en partie par l'effet du décroissement. Le pan T (fig. 169) est parallèle à T (fig. 165); le pentagone *x* (fig. 169) provient d'un décroissement par deux rangées sur l'angle l (fig. 165), parallèlement à la diagonale qui va de A en O; enfin, comme ce décroissement n'atteint pas non plus sa limite, le sommet porte un second pentagone P (fig. 169), parallèle à la base P (fig. 165). Toute cette description peut être traduite ainsi en cinq lettres $G^4M\,l\,\dot{P}$.

322. Je m'étais borné d'abord à donner les expressions pures et simples des signes indicatifs, semblables à celles qu'on vient de voir; mais j'ai senti dans la suite qu'on ne saurait prendre trop de précautions pour écarter de ce langage extrêmement concis tout ce qu'il pourrait offrir d'énigmatique, et que, dans le cas surtout où la forme était composée d'un grand nombre de facettes, ce qui entraînait nécessairement une complication proportionnelle dans l'expression

que l'autre. On aura (fig. 165) O=A, I=E, etc. On substituera donc de part et d'autre la seconde lettre à la première, comme on le voit sur la fig. 170.

En continuant de parcourir les diverses modifications du parallélépipède, on les verra passer par différens degrés de simplicité, qui détermineront de nouvelles égalités entre les lettres indicatives de leurs angles et de leurs bords, et l'on aura successivement,

Pour le prisme oblique à bases rhombes, l'expression représentée fig. 171.

Pour le prisme droit à bases rectangles, celle qu'on voit fig. 172.

Pour le prisme droit à bases rhombes, celle de la fig. 173.

Pour le prisme droit à bases carrées, celle de la fig. 174.

Enfin, pour le cube, celle de la fig. 175. Ici l'on n'a désigné que la base supérieure par des lettres, parce que l'on peut appliquer à l'une quelconque des autres faces ce qui a lieu par rapport à cette base.

On suivra, pour toutes ces différentes formes primitives, une méthode de chiffrer analogue à celle que nous avons adoptée pour le parallélogramme obliquangle de la fig. 165, en se dispensant de répéter les lettres de même nom chiffrées de la même manière.

224. Un exemple fera concevoir cette méthode. La fig. 176 représente la variété la plus ordinaire de la cymophane, dont le noyau est un parallélépipède rectangle tel qu'on le voit fig. 172. Le signe

puscule; de sorte que si tous les angles latéraux eut leurs indications exprimées, les trois qui sont plus près du sommet supérieur porteraient la re E; et les trois qui avoisinent le sommet inférieur, et qui sont diamétralement opposés aux premiers, auraient *e* pour lettre indicative.

Comme le rhomboïde a ses six faces égales et semblables, il n'est besoin que de considérer les décroissemens relatifs à l'une des faces, comme celle qui en la figure porte la lettre P, parce que tous les autres ne sont que la réplique de ceux-ci. Cela posé, 1°. les décroissemens qui partent de l'angle supérieur A ou du bord supérieur B auront leur chiffre indicateur placé en dessous de la lettre A ou B; 2° ceux qui partent des angles latéraux E, auront leur chiffre situé de côté, vers le haut de la même lettre; 3°. à l'egard de ceux qui partent de l'angle inférieur *e*, ou du bord inferieur D, le chiffre destiné à les exprimer sera placé en dessus de la lettre *e* ou D.

Supposons, par exemple, que la figure 183 représente la chaux carbonatée analogique; on aura le signe suivant $\overset{\cdot\cdot}{e}\mathrm{DB}$, dont l'interprétation est facile, $_{c\ r\ g}$ d'après les combinaisons des lettres qui indiquent les faces, avec celles qui expriment les decroissemens dont ces mêmes faces sont le résultat.

227. Il reste a faire connaître le moyen de représenter un cas particulier qui a lieu dans quelques

[illegible] qui subissent [illegible] restent intactes, ou [illegible] différentes. Ce cas con- [illegible] ordinaires, et il est facile [illegible] au moyen des zéros. Par [illegible] équidifférente repré- [illegible] rait le noyau rhomboïdal [illegible] et ennéagone a six de ses [illegible] remplis par des soustractions [illegible] D, D (fig. 185'); et les [illegible] par des soustractions de [illegible] sur les trois angles *e*. De [illegible] a simplement trois faces [illegible], tandis que sur le sommet [illegible] B sont remplacées chacune [illegible] (fig. 184), en vertu d'un dé- [illegible] atteint pas sa limite. Voici le signe [illegible] cette forme. $\dot{D}\overset{\cdot}{e}\dot{E}\overset{\circ}{P}B\overset{\cdot}{b}$. les quan- [illegible] connaître, l'une que les angles E [illegible] ne subissent aucun décroisse- [illegible] arêtes opposées à B restent pa- [illegible]

[illegible] une loi différente qui don- [illegible] pour exemple, à des soustractions de deux [illegible] considérant $\dot{D}\overset{\cdot}{e}\dot{E}\overset{\circ}{P}B\overset{\cdot}{b}$. D'après cela, [illegible] que les décroissemens re- [illegible] majuscule accompagnée d'un

chiffre quelconque, ne renfermeraient implicitement des décroissemens semblables représentés par la petite lettre de même nom, ou réciproquement, c'est-à-dire par exemple que $\dot{B}$ ne renfermerait implicitement $\dot{b}$, ou *vice versâ*, que quand la seconde lettre n'entrerait pas dans l'expression du signe avec un chiffre différent, ou ne porterait pas le même chiffre accompagné d'un zéro. Dans le premier cas, chacune des deux lettres exprime un décroissement qui est particulier à l'arête ou à l'angle qu'elle indique; dans le second, celle qui est affectée d'un zéro fait connaître que l'angle ou le bord auquel elle se rapporte exclusivement, ne subit aucun décroissement. Ainsi dans le signe $\dot{D}\dot{e}\dot{E}\dot{P}\dot{B}\dot{b}$, $\dot{B}$ exprime un décroissement par une rangée qui n'a lieu que sur les arêtes contiguës au sommet supérieur A (fig. 185); $\dot{b}$ indique un décroissement par deux rangées qui n'agit de même que sur les arêtes contiguës au sommet inférieur; enfin les quantités $\dot{e}$ et $\dot{E}$ doivent être aussi considérées indépendamment l'une de l'autre; la première comme exprimant un décroissement par deux rangées sur les angles *e* seulement, et la seconde comme indiquant zéro de décroissement sur les angles E opposés aux précédens.

228. Je me suis étendu sur l'exposition des principes de la méthode, pour ne rien laisser à désirer, s'il était possible, de ce qui pouvait aider à en bien

concevoir l'artifice, parce qu'indépendamment des facilités qu'elle offre pour l'étude des cristaux, elle a cet avantage, qu'il suffit de connaître une forme primitive avec ses dimensions, et d'avoir sous les yeux le signe d'une des variétés qui en dérivent, pour être en état de tracer une figure exacte de cette variété, ainsi que je le ferai voir dans la suite. Le signe est comme une image théorique que la projection transforme en un véritable portrait. Mais si quelqu'un se bornait à la simple intelligence des signes qu'emploie la méthode, et ne demandait qu'à savoir les lire, sans prétendre à l'art de les écrire, il ne faudrait que quelques règles simples et faciles à saisir que nous allons exposer ici succinctement; elles formeront comme le résumé de tous les détails qui précèdent.

1°. Toute voyelle employée dans le signe d'un cristal désigne l'angle solide marqué de la même voyelle sur la figure qui représente le noyau; et toute consonne indique l'arête qui porte cette même consonne, ou la face dont elle occupe le milieu.

2°. Chaque voyelle ou chaque consonne est accompagnée d'un chiffre dont la valeur ainsi que la position indique la loi de décroissement que subit l'angle ou le bord correspondant. Il faut excepter les trois consonnes P, M, T, dont chacune, lorsqu'elle fait partie du signe d'un cristal, indique que ce cristal a des faces parallèles à celle qui porte cette même lettre.

3°. Chaque lettre comprise dans l

est sous-entendue avec le chiffre qui l'accompagne, sur tous les angles ou tous les bords qui font la même fonction que celui qui sur la figure est marqué immédiatement de la lettre dont il s'agit.

4°. Tout nombre joint à une lettre indique un décroissement dont l'angle ou le bord marqué de cette lettre est le terme de départ. Si le nombre est entier, il indique combien il y a de rangées soustraites en largeur, avec la condition que chaque lame n'ait que l'épaisseur d'une molécule; si le nombre est fractionnaire, le numérateur fait connaître combien il y a de rangées soustraites en largeur, et le dénominateur combien il y en a de soustraites en hauteur.

5°. Suivant que le nombre est placé au-dessous ou au-dessus de la lettre qu'il accompagne, il indique que le décroissement descend (1) ou monte, en partant de l'angle ou du bord marqué de cette lettre. S'il est placé vers le haut, et à droite ou à gauche de la lettre, il désigne un décroissement qui a lieu dans le sens latéral, à droite ou à gauche de l'angle qui porte la même lettre.

6°. Lorsqu'une lettre se trouve écrite deux fois de

---

(1) Il ne s'agit ici que de la marche générale des décroissemens, à laquelle se rapportent les cas particuliers qui paraissent faire exception. Par exemple, si le décroissement se faisait par une rangée sur l'angle au sommet d'un rhomboïde, alors la face produite serait perpendiculaire à l'axe. Mais ce décroissement rentre dans ceux qui sont descendans, et dont il est comme la limite.

le signe $^{2}GG^{2}$, la quantité ^{2}G indique
croissement sur le bord G situé à gauc
tité G^{2} l'effet du décroissement sur l
droite.

7°. Lorsqu'une lettre porte le même
à droite et à gauche, comme $^{2}G^{2}$, elle
différemment à l'une quelconque des a
désigne. Il en est de même des lettres
nent aux angles.

8°. La parenthèse telle ($\overset{3}{O}D^{2}F^{2}$), d
croissement intermédiaire. La lettre $\overset{3}{O}$
bord que le décroissement a lieu par tr
l'angle O, et que son effet est ascend
connaître que pour une arête de molé
le long du côté marqué D, il y a deu
moins le long du côté marqué F.

9°. Toute petite lettre comprise dans
cristal indique l'angle ou le bord du m
pose à celui qui porte la lettre majusc

10°. Lorsqu'un signe renferme deux lettres de même nom, l'une majuscule, l'autre petite, avec différens chiffres, les deux bords ou les deux angles opposés auxquels répondent ces lettres, sont censés subir chacun exclusivement la loi de décroissement indiquée par le chiffre ajouté à la lettre.

11°. Toute lettre soit majuscule, soit petite, marquée d'un chiffre qui a un zéro à sa suite, fait connaître que le décroissement indiqué par ce chiffre est nul sur l'angle ou sur le bord particulier auquel cette lettre se rapporte.

J'ai omis les applications qui seraient nécessaires pour l'intelligence de ces règles, si elles étaient présentées de premier abord, parce qu'elles se trouvent déjà dans l'exposition développée que j'ai donnée précédemment des principes de la méthode, et dont la lecture est censée avoir précédé celle de ces mêmes règles.

DU RHOMBOÏDE.

2. Je place la forme primitive donnée par ce solide au premier rang parmi les sous-divisions du parallélépipède comme étant la plus féconde en modifications diversifiées. Elle doit cette prérogative au rhomboïde de la chaux carbonatée. Cette substance, la plus répandue de toutes celles dont la partie connue du globe est l'assemblage, se distingue encore par l'étendue de son domaine, sous le point de vue de la cristallisation. Ses nombreuses variétés garnissent une multitude de cavités qui interrompent la continuité de ses masses. Elles s'associent aux différentes substances métalliques qui occupent les filons; elles entrent accidentellement dans la composition de plusieurs roches, depuis les plus récentes jusqu'à celles dont la formation remonte à des époques très reculées. Les observations, à mesure qu'elles se multiplient, la font reparaître sous de nouvelles transformations. La diversité semble le disputer à la profusion, et c'est avec raison qu'on l'a nommée *le Prothée des minéraux*.

Mais ce qui ajoute beaucoup à l'intérêt que présente l'étude approfondie de ses formes, ce sont les propriétés géométriques remarquables que la théorie et le calcul nous ont dévoilées dans une partie des corps auxquels elle a donné naissance, et c'est principalement cette considération qui a déterminé la préférence que j'ai donnée à ces corps, qui composent

formes sécondaires qui dérivent du rhomb
nécessaire d'exprimer algébriquement les li
cipales que l'on doit considérer dans cette
solide.

3. La fig. 1, pl. 15, représente un rhomb
parce que c'est le cas le plus ordinair
que j'en dirai s'applique également à un
aigu.

Ayant mené les deux diagonales *bf*, *ac*
quelconque des rhombes, je désigne par *g*
diagonale horizontale *cb* ou *cf*, et par *p* la
gonale oblique *ca* ou *cd*.

4. Soit *adsg* (fig. 2) la coupe principale
boïde, formée par les deux diagonales oblic
sées *ad*, *gs* (fig. 1), et par les arêtes *ag*,
prises entre ces diagonales.

Du point *d* je mène *dr* perpendiculaire s
et du point *g* je mène *gn*, de manière qu'
perpendiculaire sur l'axe, elle se prolonge
rencontre de *ad*. Il est clair que son pro

centre du triangle équilatéral *bfg*, est la moitié de la partie *gn* qui va du centre à l'un des angles du même triangle. J'appellerai *gn* à l'avenir *la perpendiculaire sur l'axe*, et *cn*, *la demi-perpendiculaire sur l'axe*.

5. Il est facile maintenant d'exprimer en fonctions de g et de p, l'une quelconque des arêtes du rhomboïde, la perpendiculaire sur l'axe et cet axe lui-même.

1°. ab (fig. 1) $= \sqrt{(bc)^2+(ac)^2} = \sqrt{g^2+p^2}$; donc telle est l'expression de l'arête.

2°. Le côté bf du triangle équilatéral bfg étant désigné par $2g$, la ligne ng qui va du centre à l'un des angles, ou, ce qui revient au même, la perpendiculaire sur l'axe, aura pour expression $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$, d'où il suit que la demi-perpendiculaire sur l'axe est égale à $\sqrt{\frac{1}{3}g^2}$.

3°. Remarquons que les perpendiculaires gn et dr (fig. 2) divisent l'axe en trois parties égales. Car les triangles semblables acn, adr, donnent $ad:ac :: ar:an$. Or, $ad = 2an$; donc, $an = nr$. De plus, les triangles dsr, gan, étant semblables et égaux, on a $rs = an$; donc, $an = nr = rs$.

Maintenant $an = \sqrt{(ac)^2-(cn)^2} = \sqrt{p^2-\frac{1}{3}g^2}$; donc en triplant cette expression, on aura (1).

$$as = 3\sqrt{p^2-\tfrac{1}{3}g^2} = \sqrt{9p^2-\tfrac{9}{3}g^2} = \sqrt{9p^2-3g^2}.$$

(1) Il sera bon de retenir cette expression de l'axe, ainsi que

ceux de sa coupe principale.

1°. Pour les angles plans, soit mené *am* (
perpendiculaire sur *df*, et qui sera le sinus d
afd, en considérant *af* comme le rayon. Ch
le rapport entre *af* et le cosinus *mf*.

Nous avons déjà $af = \sqrt{g^2+p^2}$.

De plus, $am = \frac{bf \times ac}{df} = \sqrt{\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2}}$.

Donc

$af : am :: g^2+p^2 : 2gp$; mais $mf = \sqrt{af^2 -$

Donc

$af : mf :: g^2+p^2 : \sqrt{(g^2+p^2)^2 - 4g^2p^2} :: g$

$: \sqrt{g^4 - 2g^2p^2+p^4} :: g^2+p^2 : \pm g^2 \mp$

les signes supérieurs du dernier terme appa
au cas où le rhomboïde est obtus, et les sign
rieurs à celui où le rhomboïde est aigu.

Le résultat précédent nous offre une propriété remarquable du rhomboïde. Elle consiste en ce que dans cette espèce de solide le cosinus du petit angle plan est toujours une quantité rationnelle, pourvu que les carrés des expressions des deux diagonales soient eux-mêmes des quantités rationnelles.

2°. Pour les incidences mutuelles des faces, par exemple, pour celle de *abdf* sur *dfqs*.

Soit *amhl* (fig. 3) la coupe transversale du rhomboïde, menée par la ligne *am* (fig. 1). Cherchons d'abord le rapport entre les demi-diagonales *mr* et *ar* (fig. 3). Soit $mr = g'$, et $ar = p'$. Nous aurons,

$$(am)^2 \text{ ou } g'^2 + p'^2 = \frac{4g^2p^2}{g^2+p^2}, \text{ et } g'^2 = g^2;$$

donc

$$p'^2 = \frac{4g^2p^2}{g^2+p^2} - g^2 = \frac{4g^2p^2 - g^4 - g^2p^2}{g^2+p^2} = \frac{3g^2p^2 - g^4}{g^2+p^2};$$

donc

$$g' : p' :: g : \sqrt{\frac{3g^2p^2 - g^4}{g^2+p^2}} :: \sqrt{g^2+p^2} : \sqrt{3p^2 - g^2}.$$

Et parce que $\sqrt{3p^2 - g^2} = \sqrt{9p^2 - 3g^2} \times \sqrt{\frac{1}{3}}$, il en résulte que le rapport entre les demi-diagonales *mr* et *ar* est le même que celui du côté du rhomboïde au produit de l'axe par $\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Il est évident que si g^2 et p^2 sont rationnels, g'^2 et p'^2 le seront de même. Cela posé, ayant mené *ax* perpendiculaire sur *mh*, déterminons en fonctions de *g* et de *p* le rapport [illegible] *am* pris pour sinus

$$g'^2+p'^2 : g'^2-p'^2 :: g^2+p^2+3p^2-g^2 : g^2$$
$$-3p^2+g^2 :: 4p^2 : 2g^2-2p^2 :: 2p^2 : g^2-$$

Si le rhomboïde était aigu, on aurait

$$g'^2+p'^2 : p'^2-g'^2 :: 2p^2 : p^2-g^2 \quad (1).$$

On voit ici que la propriété relative à l'exp
du cosinus sous une forme rationnelle, qui a li
les angles plans, s'étend à ceux qui mesuren
cidences des faces.

3°. Pour les angles de la coupe principale, *a*
sera le sinus de l'angle aigu g, en prenant ag
rayon. Or,

$$ak = \frac{gn \times as}{gs} = \frac{\sqrt{4g^2} \times \sqrt{9p^2-3g^2}}{2p} = \frac{\sqrt{3g^2p}}{}$$

$$kg = \sqrt{(ag)^2-(ak)^2} = \sqrt{g^2+p^2-\frac{3g^2p^2}{p^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{g^4-2g^2p^2+p^4}}{d} = \frac{\pm g^2 \mp p^2}{p}.$$

Donc $ak : kg :: \sqrt{3g^2p^2-g^4} : \pm g^2 \pm p^2$.

Dans le rhomboïde primitif de la chaux carbonatée, on a $g = \sqrt{3}$, $p = \sqrt{2}$. Substituant ces valeurs à la place de g et de p, dans les rapports précédens, on trouve

1°. $af : mf$ (fig. 1) :: 5 : 1, ce qui donne..... $fam = 11^d\,32'\,13''$; donc $baf = 101^d\,32'\,15''$.

2°. $am : mz$: 4 : 1, ce qui donne pour l'angle amz, $75^d\,31'\,28''$.

3°. $ak : kg$ (fig. 2) :: 3 : 1, ce qui donne pour l'angle ags, $71^d\,33'\,54''$.

7. Je terminerai cet article par la solution de trois problèmes relatifs au rhomboïde, dont les sujets existent parmi les résultats de la cristallisation.

1°. Trouver le rapport entre g et p, dans le rhomboïde qui a cette propriété, que quand son axe est vertical, chacune de ses faces est également inclinée par rapport à un plan vertical et à un plan horizontal.

Soit $adsg$ (fig. 2) la coupe principale. Le triangle anc étant isocèle, on aura $cn = an$; et

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2} = \sqrt{p^2 - \tfrac{1}{3}g^2}, \text{ ou } s^2 = 3p^2 - g^2.$$

Donc $2g^2 = 3p^2$, et $g^2 : p :: \sqrt{3} : \sqrt{2}$, comme dans la chaux carbonatée.

2°. Trouver le rapport entre g et p dans le rhomboïde dont la coupe principale est un *maximum*, en supposant p constant.

Soit x la demi-diagonale horizontale. La surface

de la coupe principale sera

$$gn.as = \sqrt{\tfrac{4}{3}x^2}.\sqrt{9p^2 - 3x^2} = \sqrt{12p^2x^2 - 4x^4}.$$

Je prends la différentielle de cette quantité.

$$d.\sqrt{12p^2x^2 - 4x^4} = d.(12p^2x^2 - 4x^4)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(12p^2x^2 - 4x^4)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times (24p^2x.dx - 16x^3dx) = \frac{12p^2xdx - 8x^3dx}{(12p^2x^2 - 4x^4)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dans le cas du *maximum*, cette différentielle doit être nulle ; donc $12p^2xdx - 8x^3dx = 0$; ou

$$12p^2xdx = 8x^3dx, \text{ et } 3p^2 = 2x^2.$$

D'où l'on tire $x : p :: \sqrt{3} : \sqrt{2}$, comme dans la chaux carbonatée.

On peut démontrer ce *maximum* par la Géométrie simple. Car, le triangle *adr* étant les $\frac{2}{3}$ du triangle *ads*, à cause de la hauteur commune *dr*, et de.... $ar = \frac{2}{3}as$, sera par conséquent le tiers de la coupe principale *adsg*; donc il devra être aussi un *maximum*. Or, ce triangle étant nécessairement rectangle en *r*, et sa base *ad* étant une constante, la question se réduit à trouver, parmi tous les triangles rectangles qui ont une base commune, celui dont la surface est un *maximum*. Or, si l'on suppose que la base soit le diamètre *mn* (fig. 4) d'un cercle, il est évident que parmi tous les triangles rectangles *mf'n*, *mfn*, etc., que l'on peut construire sur cette base, celui qui donne le *maximum* est le triangle isocèle *mfn*; donc le triangle *ard* (fig. 2) sera aussi un

triangle isocèle, d'où il est facile de conclure, comme on l'a vu précédemment, que $g : p :: \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

3°. trouver le rapport entre g et p dans le rhomboïde dont la solidité est un *maximum*, en supposant p constant.

La perpendiculaire ak (fig. 2) pouvant être prise pour la hauteur du rhomboïde, la solidité de celui-ci sera égale à $ak \times 2gp$. Or,

$$ak = \frac{gn \times as}{ad} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}g^2 - (9p^2 - 3g^2)}{4p^2}};$$

et faisant $g = x$, puis exécutant la multiplication indiquée, $ak = \sqrt{\frac{12p^2x^2 - 4x^4}{4p^2}}$. Donc la solidité sera

$$2px\sqrt{\frac{12p^2x^2 - 4x^4}{4p^2}} = \sqrt{12p^2x^4 - 4x^6},$$

quantité dont la différentielle est

$$\tfrac{1}{2}(12p^2x^4 - 4x^6)^{-\frac{1}{2}} \cdot d(12p^2x^4 - 4x^6) = \tfrac{1}{2}(12p^2x^4 - 4x^6)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times (48p^2x^3dx - 24x^5dx) = \frac{24p^2x^3dx - 12x^5dx}{\sqrt{12p^2x^4 - 4x^6}},$$

Égalant cette différentielle à zéro, on a

$$24p^2x^3dx - 12x^5dx = 0.$$

D'où l'on tire $2p^2 = x^2$, et $x : p :: \sqrt{2} : 1$, ce qui a lieu dans le rhomboïde donné par la sous-division du dodécaèdre rhomboïdal, ainsi que nous le verrons dans la suite.

8. Je passe aux résultats des différentes lois de décroissement que le rhomboïde est susceptible d'offrir.

Il y a, en général, cinq espèces de décroissemens possibles, qui donneront des formes secondaires; savoir,

Un décroissement sur les bords supérieurs ab, af;

Un second sur l'angle supérieur a;

Un troisième sur les bords inférieurs db, df;

Un quatrième sur les angles latéraux b, f;

Un cinquième sur l'angle inférieur d.

De plus, les décroissemens sur les angles peuvent avoir lieu ou par des lois ordinaires, ou par des lois intermédiaires. Nous examinerons successivement ces différens cas, en commençant par les plus simples.

I. DES LOIS ORDINAIRES DE DÉCROISSEMENT RELATIVES AU RHOMBOÏDE.

1. *Décroissemens sur les bords supérieurs.*

9. Ces décroissemens donneront en général des dodécaèdres à faces triangulaires, dont trois arêtes prises alternativement coïncideront avec les arêtes ab, af, ag, etc., du noyau (fig. 1), et les autres s'élèveront au-dessus des diagonales obliques ad, aq, etc. De plus, il est évident que l'axe sera le même que celui du noyau.

Soit $adsg$ (fig. 5) la coupe principale de ce noyau, am l'arête du cristal secondaire qui s'élève au-dessus de la diagonale ad, et doit nécessairement être sur le plan qui passe par a, d, s; sm l'arête inférieure correspondante, qui coïncide avec le bord sd du

rhomboïde primitif. Soit *azt* le triangle mensurateur que nous considérons ici comme si les décroissemens se faisaient sur l'angle *a*, en observant qu'à une rangée de soustraite vers les bords *ab*, *af* (fig. 1), répond une diagonale oblique de molécule, qui mesure la quantité dont une lame de superposition dépasse l'autre.

Commençons par déterminer le rapport entre les côtés *az* et *tz* de ce triangle. Soit *a* l'arête d'une molécule, et p' sa demi-diagonale oblique. Nous aurons, en nommant *n* le nombre de diagonales soustraites,

$$az : tz :: 2p' \times n : a;$$

et parce que les dimensions de la molécule sont proportionnelles à celles du noyau,

$$az : tz :: 2np : \sqrt{g^2 + p^2}.$$

Déterminons aussi le rapport entre *mu*, perpendiculaire sur l'axe relative au dodécaèdre secondaire, et la partie *au* de l'axe comprise entre le sommet et cette perpendiculaire.

1°. Pour *mu*. Les triangles semblables *msu*, *dsr*, donnent, $ds : dr :: sm : mu$. Or,

$$ds = \sqrt{g^2 + p^2},\ dr = \sqrt{\tfrac{1}{2}g^2};$$

reste à chercher *sm*, ou seulement sa partie *dm*, puisque l'autre est connue.

Les triangles semblables *azt*, *adm*, donnent

$$az : tz :: ad : dm.$$

Donc la proportion $ds : dr :: sm$

$$\sqrt{g^2+p^2} : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} :: \frac{n+1}{n} \sqrt{g^2+p}$$

2°. Pour *au*. Cherchons *su* que
de *sa*:

$$ds : rs :: sm : s$$

ou

$$\sqrt{g^2+p^2} : \tfrac{1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2} :: \frac{n+1}{n} \sqrt{g^2+p}$$

Donc

$$au = \sqrt{9p^2-3g^2} - \left(\frac{n+1}{3n}\right)\sqrt{9p^2-3g}$$

Donc $mu : au :: (n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : 2$

10. Soient maintenant $b'am$, f
faces voisines situées vers le sor
dodécaèdre secondaire, et telleme
arêtes ab', af' se confondent a
marquées des mêmes lettres (fig.

et celle de $b'am$ sur la face qui lui est adjacente de l'autre côté de ab'.

Concevons un plan $b'yf'$, qui soit perpendiculaire sur l'axe ao. Menons $b'o$, $f'o$, yo, qui coïncident avec ce même plan ; menons ensuite $f'r$ et $f'p$ perpendiculaires l'une sur yo, l'autre sur ay, et joignons les points p, r, par une droite. L'angle $f'pr$ sera la moitié de celui qui donne l'incidence de $b'ay$ sur $f'ay$ (1). D'une autre part menons ye, yh perpendiculaires l'une sur $b'o$, l'autre sur ab', puis joignons les points e, h, par une droite. L'angle yhe sera la moitié de celui qui mesure l'incidence de $b'ay$ sur la face adjacente à ab' (2). On aura donc les deux incidences proposées, en cherchant le rapport entre le sinus $f'r$ et le cosinus pr de l'angle $f'pr$, et le rapport entre le sinus ye et le cosinus eh de l'angle yhe.

---

(1) Si l'on conçoit une ligne menée de b' en p, elle sera perpendiculaire sur ay, ainsi que $f'p$, puisque tout est égal de part et d'autre. Donc ap étant elle-même perpendiculaire [illegible] que sur $f'p$, l'est aussi sur le plan $b'pf'$, et par [illegible]ent sur le plan $f'pr$ qui se confond avec le précédent, [illegible]que $f'r$ prolongée irait tomber en b'. Donc pr qui passe [illegible] le pied de ap sera perpendiculaire sur elle. Donc puisque $f'p$ l'est aussi sur ap, l'angle $f'pr$ sera égal à l'incidence de $f'ay$ sur ayo, c'est-à-dire, à la moitié de l'incidence $b'ay$ sur $f'ay$.

(2) Cela se prouve par un raisonnement semblable à celui que nous avons fait dans la note précédente, relativement à l'angle $b'pr$ Nous aurons souvent occasion d'employer des constructions de ce genre.

Ayant prolongé gn (fig. 5) jusqu'à la rencontre de am, nous pouvons supposer, pour plus de simplicité, que le plan $b'\gamma f'o$ (fig. 6) soit à la même hauteur que gx (fig 5), en sorte que l'on ait ao (fig. 6) $= an$ (fig. 5); dans ce cas, on aura aussi $f'o$ ou $b'o$ (fig. 6) $= gn$ (fig. 5), et yo (fig. 6) $= nx$ (fig 5).

Cherchons séparément $f'r$ et pr.

1°. Pour $f'r$. Il est évident que cette ligne est la moitié de celle qui joindrait les points b', f', et puisque ces points sont censés être la même hauteur que gx, ils coïncident avec les points b, f (fig. 1), d'où il suit que $f'r$ (fig. 6) $= fc$ (fig. 1) $= g$.

2°. Pour pr. Les triangles aoy, rpy (fig. 6) sont semblables, d'après leur position respective jointe à l'égalité des angles aoy et rpy qui sont droits tous les deux. Donc, $ay : ao :: yr : pr$.

Cherchons successivement ay, ao et yr.

$$ay = \sqrt{(yo)^2 + (ao)^2}. \quad yo = nx \text{ (fig. 11)}.$$

$$au : mu :: an : nx.$$

Ou

$$\frac{2n-1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2} : (n+1)\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} :: \tfrac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}$$

$$: nx = \frac{n+1}{2n-1}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} = yo \text{ (fig. 6)}.$$

$ao = \frac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}$. Désignons par a, pour plus de simplicité, la valeur de l'axe, $\sqrt{9p^2 - 3g^2}$. Nous aurons $ay = \sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 \frac{1}{3}g^2 + \frac{1}{9}a^2}$. nous venons de

trouver ao, qui était la seconde des quantités à chercher. Reste yr.

L'angle $f'or$ étant de 60^d, et l'angle $f'ro$ de 90^d,

$$or=\tfrac{1}{2}f'o=\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.\quad yr=yo-or=\frac{n+1}{2n-1}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$$
$$=\frac{3}{2n-1}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}.$$

Donc la proportion $ay : ao :: yr : pr$ devient

$$\sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2\tfrac{4}{3}g^2+\tfrac{1}{9}a^2} : \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2} :: \frac{3}{2n-1}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} : pr$$
$$=\frac{\frac{1}{2n-1}\sqrt{\frac{1}{3}a^2g^2}}{\sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2\frac{4}{3}g^2+\frac{1}{9}a^2}}.$$

Donc $$f'r:pr::g:\frac{\frac{1}{2n-1}\sqrt{\frac{1}{3}a^2g^2}}{\sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2\frac{4}{3}g^2+\frac{1}{9}a^2}}$$
$$::\sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2\tfrac{4}{3}g^2+\tfrac{1}{9}a^2}:\frac{1}{2n-1}\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2}$$
$$::\sqrt{(n+1)^2 4g^2+(2n-1)^2\tfrac{1}{3}a^2}:a.$$

Passons au rapport entre le sinus ye et le cosinus eh de l'angle yhe.

1°. Pour ye. Nous avons

$$ye=\sqrt{(yo)^2-(oe)^2}.\quad (yo)^2=\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2\tfrac{4}{3}g^2,$$

d'après le calcul précédent. De plus, à cause de

$$eoy=60^d \text{ et } yeo=90^d,\ oe=\tfrac{1}{2}yo.$$

Donc $ye = \sqrt{\frac{3}{4}\, yoj^2} = \sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 g^2}$.

2°. Pour *eh*. Les triangles semblables $b'oa$, $b'he$ donnent, $ab' : ao :: b'e : eh$.

$$ab' = \sqrt{(b'o)^2 + (ao)^2} = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2 + \tfrac{1}{9}\,i^2}.$$

$$ao = \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2}. \quad b'e = b'o - oe = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} - \left(\frac{n+1}{4n-2}\right)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = \left[1 - \left(\frac{n+1}{4n-2}\right)\right]\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$$

$$= \frac{3n-3}{4n-2}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Donc la proportion $ab' : ao :: b'e : eh$ devient,

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2 + \tfrac{1}{9}a^2} : \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2} :: \frac{3n-3}{4n-2}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : eh.$$

$$eh = \frac{\frac{3n-3}{4n-2}\sqrt{\frac{4}{3}a^2g^2}}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2 + \frac{1}{9}a^2}} = \frac{\frac{n-1}{2n-1}\sqrt{\frac{1}{3}a^2g^2}}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2 + \frac{1}{9}a^2}}$$

$$= \frac{n-1}{2n-1}\sqrt{\frac{3a^2g^2}{12g^2 + a^2}}.$$

Donc

$$ye : eh :: \sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 g^2} : \frac{n-1}{2n-1}\sqrt{\frac{3a^2g^2}{12g^2+a^2}}$$

$$:: n+1 : (n-1)\sqrt{\frac{3a^2}{12g^2+a^2}} :: (n+1)\sqrt{12g^2+a^2}$$

$$: (n-1)\sqrt{3a^2} :: (n+1)\sqrt{12g^2 + 9p^2 - 3g^2}$$

$$: (n-1)\sqrt{3p^2 - g^2} :: (n+1)\sqrt{g^2 + p^2}$$

$$: (n-1)\sqrt{3p^2 - g^2}.$$

11. Parmi les variétés de la chaux carbonatée, il

en existe plusieurs que je ferai connaître dans la suite, et qui offrent, vers chaque sommet, six facettes produites en vertu d'un décroissement par trois rangées sur les bords supérieurs du noyau. Mais ces facettes se combinent avec d'autres qui sont dues à des lois différentes de décroissement. Pour appliquer les formules précédentes aux facettes dont il s'agit, il faut faire $n=3$, $g=\sqrt{3}$, $p=\sqrt{3}$.

En substituant ces valeurs, on trouvera,

1°. $f'r : pr :: \sqrt{89} : \sqrt{3}$, ce qui donne $79^d 35' 47''$ pour l'angle $f'pr$, et $159^d 11' 34''$ pour l'incidence de $b'am$ sur $f'am$.

2°. $ye : eh :: \sqrt{20} : \sqrt{3}$, ce qui donne $68^d 49' 43''$ pour l'angle yhe, et $137^d 39' 26''$ pour l'incidence de $b'am$ sur la face adjacente à ab'.

12. Cherchons s'il y a une loi possible de décroissement pour le dodécaèdre à triangles isocèles, ou composé de deux pyramides droites réunies base à base. Dans ce cas, $yo=b'o$. Donc aussi nx (fig. 5) $=gn$, ou bien

$$\frac{n+1}{2n-1}\sqrt{\tfrac{4}{35}g^2}=\sqrt{\tfrac{4}{48}g^2}.$$

(*Voyez* 10, 2°). Ce qui donne $n=2$. Donc la chose est possible, en vertu d'un décroissement par deux rangées.

A l'époque où j'ai publié la première édition de mon Traité, je n'avais pas encore rencontré ce cas dans la nature; mais des variétés de chaux carbonatée que j'ai observées depuis en offrent des exemples,

entre autres celle que j'appelle *sténonome*, et sur laquelle je reviendrai à l'article des formes secondaires composées.

13. A mesure que l'arête *am* se relève par son extrémité inférieure, en faisant des angles toujours plus ouverts avec l'axe *ao* (fig. 6), l'angle que fait *b'am* avec la face adjacente à *ab'* va lui-même toujours en augmentant, et il y a un terme où ces faces se trouvent sur un même plan. Le cristal secondaire devient alors un rhomboïde, dont les diagonales obliques se confondent avec les arêtes *ab'*, *af'*, etc.

Pour trouver la loi qui donne ce rhomboïde, j'observe que dans le cas où il a lieu, le cosinus *eh* s'évanouit. Donc (10) alors $\frac{n-1}{2n-1}\sqrt{\frac{3a^2g^2}{12g^2+a^2}}=0$; ou simplement $n-1=0$. Donc $n=1$, ce qui est d'ailleurs évident, d'après ce qui a été dit plus haut.

Déterminons les deux demi-diagonales du rhomboïde dont il s'agit; soient g' et p' ces deux lignes. *sm* (fig. 5) étant la diagonale oblique du rhomboïde, *mu* sera la perpendiculaire sur l'axe. Donc

$$mu=\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}.$$

Mais (9, 1°.) d'une autre part,

$$mu=\frac{n+1}{n}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}=2\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}. \text{ Donc } g'=2g.$$

Remarquons maintenant que dans le même cas la ligne *mu* est relevée de manière qu'elle se trouve sur la direction de *gn*. C'est une suite nécessaire de ce

que *sm* est la diagonale oblique. Donc alors $su = 2sr$, et $sm = 2sd$. Donc $2p' = 2\sqrt{g^2+p^2}$, ou $p' = \sqrt{g^2+p^2}$. C'est-à-dire que la demi-diagonale horizontale g' est double de celle du noyau, et que la demi-diagonale oblique p' est égale à l'arête du noyau.

Ce cas existe dans plusieurs espèces de substances minérales. Mais jusqu'à présent la chaux carbonatée est la seule qui l'ait offert sans mélange d'aucunes facettes produites par d'autres lois de décroissement. J'ai développé plus haut (pag. 100), à l'aide de la synthèse, la structure de la variété qui s'y rapporte, et que je nomme *équiaxe*. Ici $g = \sqrt{3}$, $p\sqrt{2}$, donc $g' = \sqrt{12}$, et $p' = \sqrt{5}$, ce qui donne pour l'angle obtus de chaque rhombe, $114^d\,18'\,56''$; pour l'angle aigu, $65^d\,41'\,4''$; pour la plus grande incidence des faces, $134^d\,23'\,38''$; pour la plus petite, $45^d\,34'\,22''$; pour les angles de la coupe principale, $139^d\,23'\,52''$ et $40^d\,36'\,8''$.

14. Concevons maintenant une suite de rhomboïdes qui aient de telles dimensions, que chacun soit susceptible d'être produit par le suivant considéré comme noyau, en vertu de cette même loi qui a pour expression B. Si nous désignons par g et p les demi-diagonales de l'un d'eux, qui soit compris entre les extrêmes, et que nous appellerons *générateur*, nous aurons deux séries, l'une descendante, composée des rhomboïdes plus petits que le générateur, l'autre ascendante, composée de ceux qui le

dante (1).

Soient γ et π les demi-di
dont il s'agit, en supposant
série descendante. Si $r=1$, o
ce qui a été dit plus haut (pa
Si $r=2$, on aura, par la n
si $r=3$, on aura $\gamma=\frac{1}{8}g$. Don

$$\gamma=\frac{g}{2^r}, \text{ et } \gamma^2=\frac{g^2}{(2^r)^2}=\frac{1}{4}$$

Maintenant, puisque l'axe e

$$\sqrt{9\pi^2-3\gamma^2}=\sqrt{9p^2-3g^2}, \text{ ou}$$

Donc $3\pi^2-\frac{g^2}{4^r}=3p^2-g^2$; d'o

$$3\pi^2=3p^2+\frac{1-4^r}{4^r}\cdot g^2, \text{ et } \pi=$$

Supposons que le rhomboïde
série ascendante, et désignant
par γ' et π', faisons r' succes

et en général on aura $\gamma' = 2'g$. La substitution de cette valeur de γ' dans l'équation $3\pi'^2 - \gamma'^2 = 3p^2 - g^2$ donne

$$3\pi'^2 - i'g^2 = 3p^2 - g^2. \quad \pi'^2 = \frac{3p^2 + 4'g^2 - g^2}{3} = p^2 + \frac{4'-1}{3}g^2,$$

et
$$\pi' = \sqrt{p^2 + \frac{4'-1}{3}g^2}.$$

Les perpendiculaires sur l'axe suivent le rapport des demi-diagonales γ et γ', en sorte que l'on a généralement $\sqrt{\frac{1}{3}\gamma^2} = \frac{1}{2^r}\sqrt{\frac{1}{3}g^2}$ et $\sqrt{\frac{1}{3}\gamma'^2} = 2^r \sqrt{\frac{1}{3}g^2}$.

Si dans les équations $\gamma = \frac{g}{2^r}$ et $\pi = \sqrt{p^2 + \frac{1-4^r}{3.4^r}g^2}$ relatives à la série descendante, on suppose r infinie, la valeur de γ devient infiniment petite, et comme l'unité s'évanouit dans la fraction $\frac{1-4^r}{3.4^r}$, la valeur de π se réduit à $\sqrt{p^2 - \frac{1}{3}g^2}$ ou $\sqrt{\frac{3p^2 - g^2}{3}}$, qui représente le tiers de l'axe, dont l'expression est

$$\sqrt{9p^2 - 3g^2};$$

d'où il résulte que, dans ce cas, la diagonale oblique se confond avec l'axe, en sorte que le rhomboïde se trouve converti en une aiguille dont la longueur surpasse infiniment l'épaisseur.

D'une autre part, si dans les équations

$$\gamma' = 2^r g, \text{ et } \pi' = \sqrt{p^2 + \frac{4'-1}{3}g^2};$$

angles qui représentent ceux du s
trouvent sur le même plan, sont ch

Dans la chaux carbonatée, le rh
nommé *équiaxe* offre le premier t
ascendante; je prouverai dans la s
boïde *binaire* du fer oligiste donne

Nous trouverons aussi les deux
de la série descendante dans les
carbonatée appelées *inverse* et *co*
ces rhomboïdes nous fourniront div
d'un problème qui est lié au préc
but est de déterminer la loi de d
vertu de laquelle le générateur pr
ment un rhomboïde quelconque app
des deux séries, et dont le rang r o

15. Il me reste à démontrer div
géométriques qui dérivent des décro
bords supérieurs, et qui sont [illegible]

qui présente ces propriétés, et auquel une partie d'entre elles se rapportent.

Soit *sz* (fig. 7) un rhomboïde aigu faisant la fonction de noyau, et soit *sz* (fig. 8) un dodécaèdre à triangles scalènes produit en vertu d'un décroissement sur les bords supérieurs de ce noyau, de manière que *sh*, *sm*, soient les lignes de départ qui répondent à *sa*, *sc* (fig. 7) et ainsi des autres. Si l'on fait passer des plans, l'un par les arêtes *lh*, *lm* (fig. 8), un second par les arêtes *ml*, *mn*; un troisième par les arêtes *mn*, *no*, etc., ces plans, au nombre de six, intercepteront un rhomboïde que nous désignerons par le nom de rhomboïde hypothétique, pour le distinguer du noyau. Cela posé, voici l'énoncé du problème à résoudre.

Tout rhomboïde aigu dans lequel le rapport de g^n à p^n est rationnel, est susceptible de produire, en vertu d'une loi de décroissement sur les bords B, laquelle dépend du même rapport, un dodécaèdre *sz* (fig. 8) qui réunira les propriétés suivantes :

1°. La plus petite incidence de deux faces de ce dodécaèdre, telles que *hsl*, *hsr* sera égale d'une part à la plus grande incidence de deux faces du noyau, telles que *sabc*, *abzf* (fig. 7), et d'une autre part à l'angle plan obtus *hlm* du rhomboïde hypothétique.

2°. L'incidence de deux faces adjacentes telles que *hls*, *hlz*, prises vers les deux sommets du dodécaèdre, sera égale d'une part à l'angle plan obtus *sab* ou *saf* (fig. 7) du noyau, et d'une autre part à la plus grande

Soit *pceg* (fig. 9) une cou
noyau, menée par le point *p* (f
sur la ligne *sm*, qui coïncide,
dit, avec un des bords supérie
et soit *px* (fig. 9) la section
rhombe *pceg* sur le plan du
Soit *pfd* le triangle mensurateu
au triangle *pcx*. Désignant par
sur la molécule, répond au cô
nous aurons $pf : fd :: n \times r : r ::$

De plus, si nous menons *cz* pe
pz sera le cosinus de la plus
faces du noyau, le rayon étant
Donc $cp : pz :: 2p^2 : p^2 - g^2$. Or,
pdf ou *pxc*, sont semblables : ca
sure la moitié de la plus petite
du dodécaèdre, étant par l'hypc

pcz en sera la demi-différence. Donc

$$pcz = \tfrac{1}{2}(pce - cpg) = cpx.$$

D'ailleurs, $cpz = pcx$, à cause des parallèles *pg*, *ex*; donc les triangles *czp* et *pxc* étant semblables, nous aurons *cp*:*cx* ou *pf*:*fd* :: *cp*:*pz*; et $n : 1 :: 2p^2 : p^2 - g^2$, ce qui donne $n = \frac{2p^2}{p^2 - g^2}$; et ainsi la première propriété est démontrée possible, d'une manière d'autant plus remarquable, que la valeur de *n* se trouve représentée par le rapport rationnel entre le rayon et le cosinus de la plus petite incidence des faces du noyau.

Il résulte de la démonstration précédente, que chacun des triangles du dodécaèdre, par exemple celui qui coïncide avec *px*, est perpendiculaire sur la face du noyau adjacente à celle sur laquelle naît le décroissement qui donne le triangle dont il s'agit, c'est-à-dire sur celle qui est dirigée suivant *pg*.

La formule fait connaître que la propriété qu'elle représente ne peut avoir lieu qu'autant que *p* est plus grand que *g*, c'est-à-dire que le noyau est nécessairement un rhomboïde aigu. La limite de cette propriété répond au terme où *p* étant égal à *g*, le rhomboïde devient un cube. On a alors $n = \frac{2p^2}{0}$, quantité infinie, ce qui indique que les faces du dodécaèdre se confondent avec celles du noyau cubique.

17. L'égalité suivante est celle qui a lieu entre l'incidence des mêmes faces *hsl*, *hsr*, et l'angle plan

si, dans l'hypothèse de $n = \frac{2p^2}{p^2 - g^2}$ on a

$$g' : p' :: \sqrt{3p^2 - g^2} : \sqrt{g^2 + 1}$$

Supposons deux perpendiculaires me
du dodécaèdre *ss* (fig. 8), l'une d'un de
raux supérieurs, tel que *m*, du rhomboï
tique, l'autre de l'un de ses angles latéraux
tel que *r*. Il est facile de concevoir que
l'axe qu'elles intercepteront sera égale
l'axe du rhomboïde hypothétique. Serv
la figure 5, relative aux décroissemens s
supérieurs, en supposant que la coupe
adeg du noyau appartienne, comme d
présent, à un rhomboïde aigu. Les points
les analogues des points *m*, *r* (fig. 8), *l*
représentera le tiers de l'axe du noyau hyp
et l'on aura

D'une autre part,

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} = \frac{n+1}{n}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}, \text{ ou } \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2} = \frac{n+1}{n}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}.$$

Donc

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2} : \tfrac{1}{3}\sqrt{9p'^2 - 3g'^2} :: \frac{n+1}{n}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} : \frac{n-2}{3n}a,$$

ou $g'^2 : 3p'^2 - g'^2 :: (n+1)g : (n-2)a\sqrt{\tfrac{1}{3}}$.

Ajoutant chaque antécédent à son conséquent, et divisant les deux nouveaux conséquens par 3,

$$g'^2 : p'^2 :: (n+1)^2 g^2 : (n-2)^2 \tfrac{1}{9}a^2 + (n+1)^2 \tfrac{1}{3}g^2;$$

et mettant à la place de n sa valeur $\frac{2p^2}{p^2 - g^2}$,

$$g'^2 : p'^2 :: (3p^2 - g^2)^2 g^2 : \tfrac{4}{3}g^4(3p^2 - g^2) + (3p^2 - g^2)^2 \tfrac{1}{3}g^2$$
$$:: (3p^2 - g^2)g^2 : \tfrac{4}{3}g^4 + (3p^2 - g^2)\tfrac{1}{3}g^2 :: 3p^2 - g^2 : \tfrac{4}{3}g^2$$
$$+ p^2 - \tfrac{1}{3}g^2 :: 3p^2 - g^2 : g^2 + p^2.$$

Donc, $g' : p' :: \sqrt{3p^2 - g^2} \quad \sqrt{g^2 + p^2}$, ce qu'il fallait trouver.

Puisque l'angle *hlm* ou *lhr* est égal en même temps à l'angle *pce* (fig. 9), et à celui que font entre elles les faces *hsl*, *hsr* (fig. 8), il résulte de cette dernière égalité, que l'arête *hs* est perpendiculaire sur le plan auquel appartient l'angle *lhr*, d'où il suit encore que les angles *shl*, *shr*, et les autres semblablement situés sont droits. Ainsi, tous les dodécaèdres renfermés dans la formule $n = \frac{2p^2}{p^2 - g^2}$ ont cette autre propriété remarquable, que leurs faces sont des triangles rec-

tangles. Par une suite nécessaire, les faces du dodécaèdre, telles que *hsl*, *hsr*, font des angles droits avec la face du rhomboïde hypothétique qui leur est adjacente, c'est-à-dire, dans le cas présent, avec celle que termine l'angle *lhr*. On voit ici reparaître, dans la relation entre les faces du dodécaèdre et celles du noyau hypothétique, la même incidence perpendiculaire qui a déjà été observée dans les positions respectives des faces du dodécaèdre et de celles du noyau.

18. Passons aux analogies qui dérivent de l'incidence des faces *hls*, *hlz*, prises vers les deux sommets. Cette incidence est d'abord égale à l'angle plan obtus *sab*, ou *saf* (fig. 7) du noyau, et cela par une suite nécessaire de ce que les angles *shl*, *shr* (fig. 8), sont droits. Pour le prouver, d'un point quelconque *x* de l'arête *hl*, je mène les lignes *xt*, *xy*, perpendiculaires sur cette arête, et couchées sur les faces *shl*, *lzh*. L'angle *shl* étant droit, *tx* est parallèle à *hs*, qui coïncide avec le bord supérieur *as* du noyau (fig. 7). Par la même raison, *xy* (fig. 8) est parallèle à *lz*, qui coïncide avec le bord inférieur *bz* du noyau (fig. 7). Mais *bz* est parallèle à *af*; donc *xy* (fig. 8) est aussi parallèle à *af* (fig. 7). D'ailleurs *tx* (fig. 8) est parallèle à *as* (fig. 7); donc l'angle *txy* (fig. 8) est égal à l'angle *saf* (fig. 7).

Reste à prouver que l'incidence de *hls* sur *hlz* est aussi égale à la plus grande incidence des faces du rhomboïde hypothétique. Désignant par *s* le sinus

de la moitié de l'incidence de *hls* sur *hlz*, et par *c* le cosinus, nous aurons, d'après ce qui vient d'être dit,

$$s : c :: p : g.$$

La question se réduit donc à prouver que l'on a d'une autre part $p : g :: \sqrt{g'^2+p'^2} : \sqrt{3p'^2-g'^2}$, puisque ce dernier rapport est celui qui a lieu entre les demi-diagonales de la coupe transversale du noyau hypothétique.

Nous avons eu plus haut,

$$g' : p' :: \sqrt{3p^2-g^2} : \sqrt{g^2+p^2},$$

ou $$g'^2 : p'^2 :: 3p^2-g^2 : g^2+p^2.$$

Or, il est facile de transformer cette proportion en celle que nous cherchons. Car, ajoutant chaque conséquent à son antécédent, nous aurons

$$g'^2+p'^2 : p'^2 :: 4p^2 : g^2+p^2, \text{ ou } g'^2+p'^2 : 4p'^2 : p^2 : g^2+p^2;$$

et retranchant les antécédens des conséquens,

$$g'^2+p'^2 : 3p'^2-g'^2 :: p^2 : g^2.$$

Donc $p : g :: \sqrt{g'^2+p'^2} : \sqrt{3p'^2-g'^2}$, ce qu'il fallait trouver.

Ce résultat comparé à celui d'où nous l'avons déduit, et qui donne $g' : p' :: \sqrt{3p^2-g^2} : \sqrt{g^2+p^2}$, nous fait connaître que les angles plans du noyau sont égaux aux angles saillans du rhomboïde hypothétique, ou à ceux de sa coupe principale et réciproquement, ce que l'on exprime en disant que

chacun des rhomboïdes est l'inverse de l'autre. Cette inversion est donc aussi une propriété inhérente à la valeur $\frac{2p^2}{p^2-g^2}$ de n, et offre une nouvelle preuve de sa fécondité. Je traiterai directement, dans la suite, de ces sortes d'inversions, dont plusieurs rhomboïdes de chaux carbonatée offrent des exemples.

19. Je n'ai observé jusqu'ici aucun dodécaèdre produit en vertu d'un décroissement sur les bords supérieurs d'un rhomboïde aigu, qui réalisât complètement les résultats démontrés précédemment. Nous verrons cependant que parmi les formes secondaires originaires du tétraèdre régulier, dont la cristallisation rentre dans celle du rhomboïde, il en est une qui participe des propriétés d'où dépendent ces résultats. De plus, nous ferons connaître un dodécaèdre de chaux carbonatée, qui ne diffère de celui dont il s'agit ici, qu'en ce que le rhomboïde que nous avons considéré comme le noyau, et celui que nous avons nommé hypothétique, y changent de rôle, de manière que le décroissement qui donne le dodécaèdre a lieu sur les bords inférieurs du second rhomboïde.

II. *Décroissemens sur l'angle supérieur.*

20. Ces décroissemens donneront constamment des rhomboïdes pour formes secondaires. Continuons de nous servir de la figure 5, dans laquelle *ao* représentera la diagonale obliq des fa

rhomboïde secondaire, et *so* l'arête contiguë de cette diagonale, en sorte que si du point *o* on mène une perpendiculaire sur l'axe, elle coïncidera avec *dr*, puisque le point *o* doit être situé vis-à-vis le tiers de l'axe. De plus, *atz* qui, dans le cas précédent, remplaçait le véritable triangle mensurateur, deviendra ici d'un usage direct; et la quantité *n* désignera toujours le nombre des diagonales soustraites, avec la différence qu'il faudra doubler ce nombre pour avoir celui des rangées soustraites.

21. Proposons-nous d'exprimer d'une manière générale les valeurs des deux demi-diagonales g' et p' du rhomboïde secondaire, en supposant que l'on connaisse g, p et n.

Nous avons d'abord

$$or : ar :: \sqrt{\tfrac{4}{36}g'^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9p'^2 - 3g'^2}.$$

Et parce que les expressions de *mu* et *au* restent les mêmes que dans le cas des décroissemens sur les bords supérieurs (9, 1°. et 2°.), nous aurons,

$$or : ar :: mu : au :: (n+1)\sqrt{\tfrac{4}{36}g^2} : \frac{2n-1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}$$

$$:: \sqrt{\tfrac{4}{36}g'^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9p'^2 - 3g'^2}.$$

Mais l'axe du rhomboïde secondaire est le même que celui du noyau; donc la proportion précédente devient, toute réduction faite, $(n+1)g : 2n-1 :: g' : 2$.

D'où l'on tire $g' = 2g\,\frac{(n+1)}{2n-1}$.

donc $p' = 4g$

$$p' = \sqrt{\frac{4}{36}g}$$

22. Supposons que
deux rangées, et que l
fer oligiste, représenté (
et $p = \sqrt{10}$, ce qui do
de deux faces prises ve
aura $n = 1$, et la proport

$$g' : p' :: \sqrt{}$$

J'appelle *fer oligiste bin*
résultat. L'incidence de de
prises vers un même sommet
de s sur la face adjacente du cô
est de 56^d.

Quelquefois le décroissem
voir atteint sa lim

fer oligiste rhomboïdal. L'incidence de *s* sur P est de $144^d 8'$ (1).

23. Si l'on fait $n=2$, auquel cas le décroissement aura lieu par quatre rangées, on trouve $g'=2g$ et $p'=\sqrt{g^2+p^2}$. Or ce rapport est aussi celui des demi-diagonales d'un rhomboïde secondaire qui résulterait du décroissement $\breve{B}$, autour d'un noyau dont les demi-diagonales seraient *g* et *p*. Concluons de là que dans la série des rhomboïdes que nous avons considérée plus haut, et dont chacun est susceptible d'être produit par le suivant, pris pour noyau, à l'aide de la loi $\dot{B}$, le même résultat peut aussi avoir lieu en vertu de la loi $\dot{A}$. Nous verrons souvent reparaître, dans le développement de la théorie, ces doubles solutions d'un même problème, dont plusieurs sont réalisées par la cristallisation. Mais celle qui vient de nous occuper est jusqu'ici purement hypothétique.

---

(1) Pour avoir cette incidence, on fera attention qu'elle est égale à la somme des angles *amu* (fig 5) et *dkn*, dont l'un mesure l'inclinaison de *s* (fig. 12) sur un plan horizontal qui passe par la base du même triangle, et l'autre celle de P sur le même plan. Le rapport de *mu* à *ou* que nous avons déterminé plus haut (pag. 311), donnera la première inclinaison, et l'on aura la seconde en cherchant d'abord l'angle *akn*, d'après le rapport de *kn* à *an*, ou de *g* à $\sqrt{5p^2-g^2}$, et en prenant ensuite le supplément de cet angle.

24. Faisons $n = \frac{1}{2}$, ce qui est le cas d'un décroissement par une rangée. La formule

$$p' = \sqrt{\tfrac{3}{4}g^2\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2 + p^2 - \tfrac{1}{3}g^2}$$

deviendra $p' = \sqrt{\frac{4}{3}g^2 \times \frac{9}{0} + p^2 - \frac{1}{3}g^2}$, ce qui signifie que la diagonale oblique ao (fig. 5) est elle même infinie, et que par conséquent la face sur laquelle elle tombe est horizontale (1). Ce cas a lieu

(1) La construction suivante aidera à concevoir ce que signifient ces sortes de rapports que l'on dit être infinis lorsqu'ils expriment une quantité finie divisée par zéro, et infiniment petits dans le cas contraire. Soient nm, ec (fig. 14) deux parallèles qui tombent à angle droit ou autrement sur une droite cp. Par un point d pris à volonté sur nm, menons adf qui fasse un angle quelconque avec cp, puis menons db parallèle à cette dernière ligne. Faisons $ab = x$, $bd = a$, $dm = g$. Nous aurons $x : a :: g : fm = \frac{ag}{x}$. Si nous supposons maintenant que la ligne adf restant fixe par le point d, s'abaisse par son extrémité a, de manière à prendre successivement la position odp, et d'autres positions qui soient telles, que le point o tende continuellement vers le point b la ligne adf approchera de plus en plus du parallélisme avec cp qui est la limite de toutes les positions dont il s'agit. En même temps dans l'équation $fm = \frac{ag}{x}$, la quantité fm ira en croissant, et la quantité x diminuera. Or, lorsque x s'évanouit auquel cas l'équation devient $fm = \frac{ag}{0}$, le point a se confond avec le point b, et la ligne fm est infinie, puisqu'elle ne peut

dans la chaux carbonatée, le corindon, le fer oligiste, la tourmaline, etc. Alors, ou bien il se fait un second décroissement d'où résultent des faces latérales dont les intersections limitent la face supérieure, ou bien il reste des faces parallèles à celles du noyau.

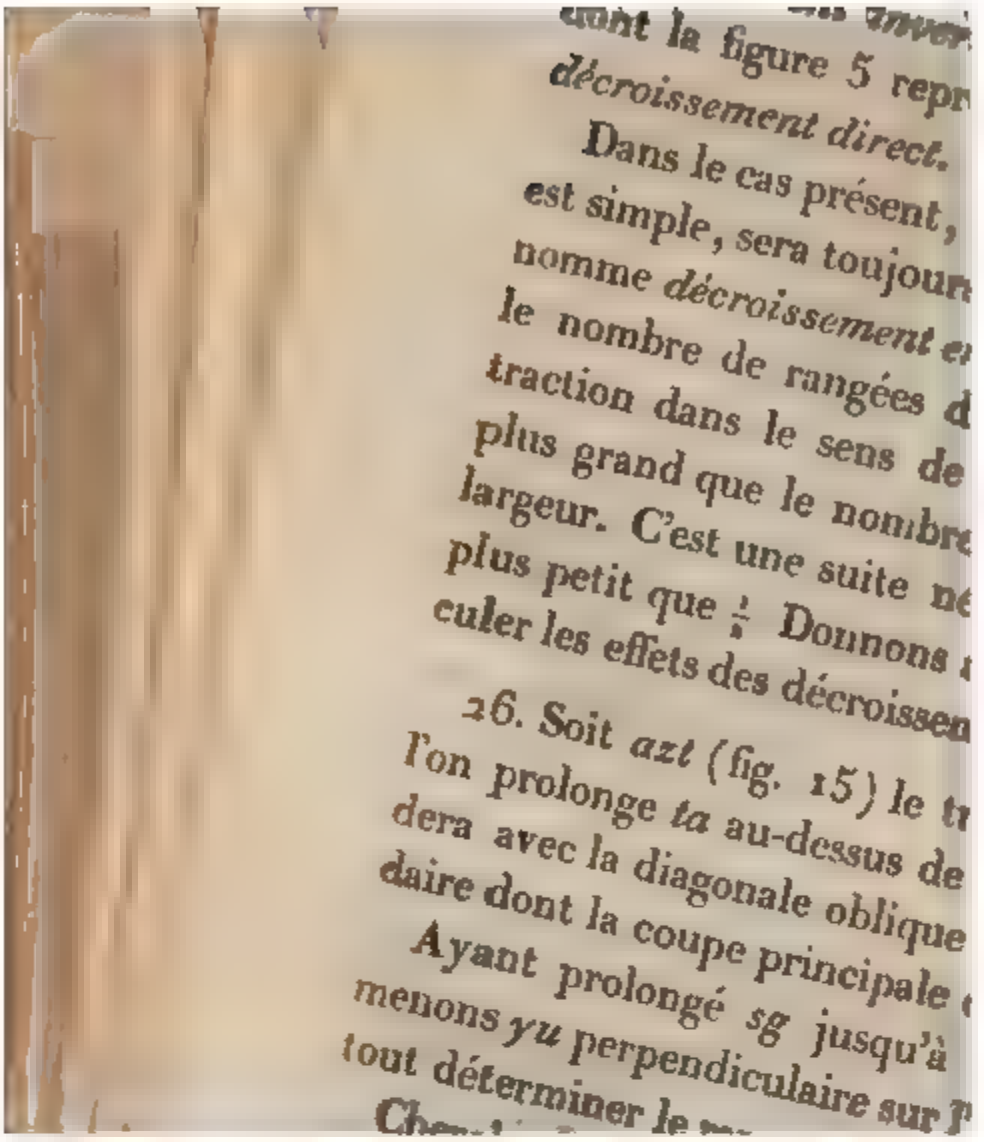
Le fer oligiste, entre autres, offre un exemple de cette dernière modification dans la variété que je nomme *fer oligiste basé*, et qui est représentée (fig. 13). L'incidence de P sur la surface *o* qui fait la fonction de base, est de $123^d\ 14'$ (1).

25. Si nous supposons que la ligne *ao* (fig. 5), qui représente en général la diagonale oblique des rhomboïdes secondaires produits par un décroissement sur l'angle supérieur du noyau, dépasse la limite qui répond à $n=\frac{1}{0}$, et qui donne une face perpendiculaire à l'axe, elle se rejettera du côté opposé à celui où naît le décroissement, en prenant une position telle que *ap* (fig. 15). Les faces du

---

plus rencontrer la ligne *af*, qui lui est devenue parallèle, en atteignant la limite de ses positions. On voit par là dans quel sens on doit entendre que le rapport $\frac{ag}{o}$ représente une quantité infinie. C'est sous ce point de vue que la diagonale *ao* (fig. 5) du rhomboïde secondaire étant devenue parallèle, dans le cas que nous venons de considérer, à la ligne *or*, qu'elle rencontrait jusqu'alors, doit être considérée comme une quantité infinie.

(1) Elle est le supplément de l'angle *akn* (fig. 5), dont la détermination est facile, d'après ce qui a été dit plus haut.



dont la figure 5 repr
décroissement direct.

Dans le cas présent,
est simple, sera toujour
nomme *décroissement e*
le nombre de rangées d
traction dans le sens de
plus grand que le nombre
largeur. C'est une suite né
plus petit que $\frac{1}{3}$. Donnons
culer les effets des décroissem

26. Soit *azt* (fig. 15) le t
l'on prolonge *ta* au-dessus de
dera avec la diagonale oblique
daire dont la coupe principale
Ayant prolongé *sg* jusqu'à
menons *yu* perpendiculaire sur
tout déterminer le

Les triangles semblables atz, ayg donnent

$$az : tz :: gv : ag,$$

ou $\quad 2p \times n : \sqrt{g^2+p^2} :: gy : \sqrt{g^2+p^2}.$

Donc $gy = 2np$; donc $sy = 2p+2np$.

De plus, $gm = \sqrt{\frac{1}{36}g^2}$.

La proportion devient donc,

$$2p : 2p+2np :: \sqrt{\tfrac{1}{36}g^2} : uy = (n+1)\sqrt{\tfrac{1}{36}g^2}.$$

Reste à trouver au.

Or $au = as - us = \sqrt{9p^2 - 3g^2} - us$.

Cherchons us. Les triangles semblables smg, suy donnent $sg : sy :: sm : us$; ou

$$2p : 2p+2np :: \tfrac{2}{3}\sqrt{a^2} : us \ (1).$$

Donc $us = \frac{2n+2}{3}\sqrt{a^2}$; donc

$$au, \text{ ou } \sqrt{a^2} - \left(\frac{2n+2}{3}\right)\sqrt{a^2} = \frac{1-2n}{3}\sqrt{a^2};$$

donc $\quad uy : au :: (n+1)\sqrt{\tfrac{1}{36}g^2} : \frac{1-2n}{3}\sqrt{a^2}$

27. Déterminons maintenant d'une manière générale les valeurs des deux demi-diagonales g' et p' du rhomboïde secondaire. Il est d'abord évident que dans ce rhomboïde lm est la demi-perpendiculaire sur l'axe, et am est le tiers de cet axe; et parce

(1) La quantité a désigne l'axe du noyau.

…ment, $2g'(n+$

$$g' =$$

Maintenaut, à cause d

ou $3p'^2 - g$

$$p'^2 = \tfrac{1}{36}g'^2 + p^2 - \tfrac{1}{36}g^2 =$$

Donc $p' = \sqrt{\tfrac{1}{36}g^2\left(\frac{n+}{1-2}\right.}$

28. Les mêmes rhombo
croissement direct sur l'an
faces sont tournées vers l
noyau, sont encore suscep
vertu d'un décroissement in
leurs faces correspondent
Cherchons une formule à l'
donnée la loi relative à l'an
puisse connaî

compare les formules qui expriment, relativement aux deux rhomboïdes, les demi-diagonales g' et p', on verra qu'elles ne diffèrent que par le facteur qui renferme la quantité n, et qui est d'une part $\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^2$, et d'une autre part $\left(\frac{n'+1}{1-2n'}\right)^2$, n' devant être substitué à n dans la seconde. Donc puisque les diagonales sont égales, on aura

$$\frac{n+1}{2n-1} = \frac{n'+1}{1-2n'},$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{2-n'}{4n'+1} \quad \text{et} \quad n' = \frac{2-n}{4n+1}.$$

Ces formules indiquant les mêmes fonctions réciproques entre n et n', l'une d'elles, prise à volonté, par exemple la première, qui est $n = \frac{2-n'}{4n'+1}$, suffit pour la solution des deux espèces de problèmes; c'est-à-dire que l'on peut supposer indifféremment à n' une valeur moindre ou plus grande que la fraction $\frac{1}{2}$, relative à un rhomboïde qui, dans le premier cas, naîtra d'un décroissement inverse, et dans le second d'un décroissement direct; la valeur qui en résultera pour n se rapportera au rhomboïde correspondant, produit en vertu d'un décroissement direct ou inverse.

29. Lorsque dans la formule on fait $n' = \frac{1}{2}$, comme cela doit être, les triangles mensurateurs *azt* (fig. 5) et *azt* (fig. 15) étant alors égaux et semblables, les lignes *ao* (fig. 5) et *ap* (fig. 15), coïncident sur une même direction perpendiculaire à l'axe *az*.

au décroissement inverse
$p = \sqrt{10}$, comme dans
$$g' : p' :: 6.2 : \sqrt{12.4+}$$
ce qui est le même rappor
pour le fer oligiste binair
emploi d'une même forme
croissemens dont il s'agit, n
contré parmi les produits de
Soit $n' = 2$; on trouvera
ment petite, qui fait connai
ligne ap (fig. 15) se confond
à-dire que le rhomboïde seco
celui qui résulte d'un décroiss
sur les bords supérieurs du no
obtenu (23) le même résult
différente.
Au reste, nous verrons dans
tats des décroissemens inverses
parler rentrent

III. *Décroissemens sur les bords inférieurs.*

30. Les solides secondaires qui naissent de cette espèce de décroissement sont toujours des dodécaèdres à faces triangulaires scalènes, dont un des côtés se confond avec une des arêtes latérales *bd*, *df*, *fq*, etc. (fig. 1) du rhomboïde primitif.

Soit *adsg* (fig. 16) la coupe principale de ce rhomboïde, *pu* l'axe du dodécaèdre secondaire, *pd*, *du* deux arêtes contiguës de ce dodécaèdre. Soit *dho* le triangle mensurateur, dans lequel *ho* sera égal à une arête de molécule, et *dh* à autant de diagonales obliques de molécule qu'il y aura de rangées soustraites. Soit n le nombre de ces diagonales, p' la moitié de l'une des mêmes diagonales, et g' la moitié de la diagonale horizontale.

Nous aurons $ho = \sqrt{g'^2 + p'^2}$ et $dh = 2np'$.

31. Déterminons d'abord la partie *ap* de l'axe du cristal secondaire, ou la quantité dont cet axe dépasse de chaque côté celui du noyau.

Ayant prolongé *ga* jusqu'à la rencontre de *dp*, nous aurons les triangles semblables *pal*, *psd*, qui donnent $ds : ps :: al : ap$.

Or, 1°. $ds = \sqrt{g^2 + p^2}$.

2°. $ps = ap + as = ap + \sqrt{9p^2 - 3g^2}$.

3°. Pour *al*. Les triangles semblables *dho*, *dal*, donnent $dh : oh :: ad : al$.

Ou $2np' : \sqrt{g'^2 + p'^2} :: 2p : al = \frac{p}{n}\sqrt{\frac{g'^2 + p'^2}{p'^2}}$.

Et parce que les dimensions des molécules sont proportionnelles à celles du noyau, on aura, en substituant le rapport $\frac{g^2+p^2}{p^2}$ au rapport $\frac{g'^2+p'^2}{p'^2}$,

$$al=\frac{1}{n}\sqrt{g^2+p^2}.$$

Donc la proportion $ds:ps::al:ap$ devient

$$\sqrt{g^2+p^2}:ap+\sqrt{9p^2-3g^2}::\frac{1}{n}\sqrt{g^2+p^2}:ap.$$

D'où l'on tire $ap=\frac{1}{n-1}\sqrt{9p^2-3g^2}$.

32. Déterminons maintenant les incidences respectives des faces du dodécaèdre, aux endroits des arêtes contiguës aux sommets. Soit as (fig. 17) le noyau, et bpd, dpf, fpq trois des faces du dodécaèdre. Menons la demi-diagonale horizontale de du rhombe $dfqs$, puis ayant prolongé pf, menons dk perpendiculaire sur ce prolongement, et joignons les points k, e, par une droite. L'angle dke mesurera la moitié de l'incidence de dpf sur fpq.

D'une autre part, menons la demi-diagonale horizontale fc du rhombe $abdf$, puis fz perpendiculaire sur dp, et joignons les points c, z, par une droite. L'angle fzc mesurera la moitié de l'incidence du triangle fpd sur bpd, et il est facile de voir que cette incidence sera toujours plus grande que la première.

Cherchons d'abord de et ek.

Il est évident que $de=g$. Reste à trouver ek.

Soit pg (fig. 16) l'arête qui passerait par les

mêmes points (fig. 17), et qui sera égale à *pf*. Menons *sy* (fig. 16) perpendiculaire sur le prolongement de *pg*, et par le milieu *e* de *sg* une autre perpendiculaire *ek* sur le même prolongement. Celle-ci sera la même que *ek* (fig. 17), et nous aurons sa valeur, au moyen de celle de *sy* qui en est le double.

Les triangles semblables *png*, *pys*, donnent

$$pg : gn :: ps : sy.$$

1°. Pour *pg*. Nous avons $pg = \sqrt{(pn)^2+(gn)^2}$.

$$pn = ap + an = \frac{1}{n-1}\sqrt{9p^2-3g^2} + \frac{1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2}$$

$$= \frac{n+2}{3n-3}\sqrt{9p^2-3g^2} \quad (31).$$

$gn = \sqrt{\frac{4}{36}g^2}$. Donc $pg = \sqrt{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 a^2 + \frac{4}{36}g^2}$.

2°. Connaissant déjà *gn*, cherchons *ps*.

Or $ps = ap + as = \frac{1}{n-1}\sqrt{a^2} + \sqrt{a^2} = \frac{n}{n-1}\sqrt{a^2}$.

Donc, la proportion $pg : gn :: ps : sy$ devient

$$\sqrt{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 a^2 + \frac{4}{36}g^2} : \sqrt{\frac{4}{36}g^2} :: \frac{n}{n-1}\sqrt{a^2} : sy$$

$$= \frac{n}{n-1}\sqrt{\frac{\frac{4}{1}a^2g^2}{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 a^2 + \frac{4}{36}g^2}}.$$

Prenant donc la moitié de cette expression pour la

valeur de *ek* (fig. 17), nous aurons

$$de : ek :: g : \frac{n}{n-1}\sqrt{\frac{\frac{1}{3}a^2g^2}{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2a^2+\frac{4}{3}g^2}}$$

$$:: \sqrt{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2a^2+\frac{4}{3}g^2} : \frac{n}{n-1}\sqrt{\frac{1}{3}a^2}.$$

Cherchons aussi *fc* et *cz*.

fc = *g*. Reste à trouver *cz*.

Du point *a* (fig. 16) pris à l'extrémité de l'axe, et du point *c* pris au milieu de *ad*, menons *ax* et *cz* toutes deux perpendiculaires sur *dp*. *cz* sera la même ligne que fig. 16, et *ax* en sera le double.

Or, les triangles semblables *prd*, *pxa* donnent

$$dp : dr :: ap : ax.$$

dr et *ap* étant déjà connues, il ne faut plus que chercher *dp*.

Nous avons $dp = \sqrt{(pr)^2+(dr)^2}$.

$$pr = ap + ar = \frac{1}{n-1}\sqrt{a^2} + \frac{2}{3}\sqrt{a^2} = \frac{2n+1}{3n-3}\sqrt{a^2}$$

(*voyez* 31).

Donc $dp = \sqrt{\left(\frac{2n+1}{3n-3}\right)^2a^2+\frac{4}{3}g^2}$.

Donc la proportion devient,

$$\sqrt{\left(\frac{2n+1}{3n-3}\right)^2a^2+\frac{4}{3}g^2} : \sqrt{\frac{4}{3}g^2} :: \frac{1}{n-1}\sqrt{a^2} : ax.$$

Prenant la moitié de la valeur de *ax*, nous aurons *cz*

(fig. 16); et

$$fc : cz :: g : \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{n-1}\right)^2 \frac{1}{3} a^2 g^2}{\left(\frac{2n+1}{3n-3}\right)^2 a^2 + \frac{1}{3} g^2}}$$

$$:: \sqrt{\left(\frac{2n+1}{3n-3}\right)^2 a^2 + \frac{1}{3} g^2} : \left(\frac{1}{n-1}\right) \sqrt{\frac{1}{3} a^2}.$$

33. Déterminons encore l'incidence de l'une quelconque *dpf* (fig. 17) des faces situées vers l'un des sommets, sur la face adjacente, de l'autre côté de *df*, vers le sommet opposé.

Soit *abcd* (fig. 18) la coupe transversale du noyau, et *bzx* le triangle mensurateur. Du point *x* abaissons *xm* perpendiculaire sur la diagonale *bd*, et par le point *z* menons *zt* perpendiculaire sur *xm*. Soient g', p' les demi-diagonales qui, sur la molécule, répondent à *bo* et *ao*, et soit *r* la dimension qui, sur la même molécule, répond à *ab*. Nous aurons $bz = n + r$, et $xz = r = sz$; de plus *st* ou $tx = p'$ et $tz = g'$; et il est facile de voir que l'angle *xbm* mesurera la moitié de l'incidence cherchée. La question se réduit donc à trouver le rapport entre le sinus *mx* et le cosinus *bm* de cet angle.

Les triangles semblables *bsm*, *tsz* donnent $bs : sz :: ms : st$, ou, $bs : 2sz :: ms : 2st$ et $bs + 2sz$, ou $bz + sz : 2sz :: ms + 2st$ ou $mx : 2st$. Donc $nr + r : 2r :: mx : 2p'$, ou $n + 1 : 1 :: mx : p'$. Donc $mx = (n + 1)p'$. D'une autre part, les mêmes triangles donnent $bs : sz :: bm : tz$, et $bz - sz$ ou.....

$nr+r : r :: bm : g'$; ou, $n+1 : 1 :: bm : g'$. Donc $bm=(n+1)g'$. Donc $mx : bm :: (n+1)p' : (n+1)g'$.

34. Voici une autre manière de parvenir au même résultat. Ayant prolongé xz jusqu'à la rencontre h de bd, j'observe que mx contient autant de fois p' que xz ou r est contenu de fois dans hx. Mais

$$hx=hz+xz=bz+xz=nr+r=(n+1)r.$$

Donc $mx=(n+1)p'$. D'une autre part, bm contient autant de fois g' que r est contenu de fois dans bs; mais $bs=bz-sz=nr-r=(n-1)r$.

Donc $$bm=(n-1)g'.$$

Donc $$mx : bm :: (n+1)p' : (n-1)g'.$$

Or, les formules relatives aux propriétés générales des rhomboïdes (p. 285) donnent

$$p' : g' :: \sqrt{3p^2-g^2} : \sqrt{g^2+p^2};$$

d'où l'on conclura que

$$mx : bm :: (n+1)\sqrt{3p^2-g^2} : (n-1)\sqrt{g^2+p^2}.$$

35. Avant d'appliquer les différentes expressions que nous venons de trouver, je vais démontrer plusieurs propriétés générales relatives au mode de décroissement que nous considérons ici.

La première consiste en ce que le rapport des solidités du solide primitif et du dodécaèdre secondaire, est le même que celui des axes, quelles que soient d'ailleurs les valeurs de p et de g.

Pour le démontrer, faisons passer un premier plan

par *dps*, et un second par *spf*; ces deux plans joints à *dpf* et *dfs* intercepteront une pyramide triangulaire, dont nous supposerons le sommet en *f*, d'où il suit que la base sera *dps*.

D'une autre part, nous aurons dans le rhomboïde une pyramide correspondante, dont les faces seront *das*, *saf*, *daf* et *dfs*. Supposons de même le sommet en *f*; la base sera *das*. Or cette base est à la base *dps* de la première pyramide comme

$$as : ps :: a : a + \frac{1}{n-1} a.$$

Donc puisque les deux sommets se confondent, les solidités des pyramides seront entre elles dans le rapport des mêmes quantités. Mais la partie du dodécaèdre dont il s'agit ici est composée de six pyramides, ainsi que le rhomboïde. Donc la solidité du rhomboïde est aussi à celle de cette partie, comme

$$a : a + \frac{1}{n-2} a.$$

Donc si l'on désigne par d^s l'excès de cette même partie sur le rhomboïde, la solidité de celui-ci sera à $d^s :: a : a\frac{1}{n-1} - a - a^s$ ou $:: a : \frac{1}{n-1} - a$. Or, la solidité du dodécaèdre entier est $a + 2d^s$; donc celle du rhomboïde est à celle du dodécaèdre

$$:: a : a + \frac{2}{n-1} a;$$

et il est facile de voir que ce rapport est aussi celui des axes.

Ce même rapport réduit à sa plus simple expres-

autour du sommet *a*. Cela posé, nous pouvons faire dépendre la solution du problème de cette seule condition, que l'incidence de *dpf* sur *dfqs*, soit égale à celle de *abdf* sur la face située le long de *ab* derrière le rhomboïde.

Soit *amhl* (fig. 19) la coupe transversale de ce rhomboïde, prise par un plan qui en partant du point *a*, coupe perpendiculairement l'arête *df*. Ayant prolongé *la*, menons *my*, de manière que l'angle *ymh* soit égal à *mal* ou *mhl*, auquel cas *my* sera sur la direction de la face *dpf* (fig. 17), en sorte que l'angle *ymh* (fig. 19) représentera l'incidence de *dpf* (fig. 17) sur *dfqs*, et l'angle *mal* (fig. 19) celle de *abdf* (fig. 17) sur la face dont *ab* fait la jonction avec ce rhombe. Or, *my* et *hl* étant inclinées de la même quantité entre les parallèles *hm*, *ly*, on a $my = hl = am$. Menons *mt* perpendiculaire sur *ay*, et qui la divisera en deux parties égales. Les formules générales relatives à la valeur du cosinus de la plus petite incidence respective des faces d'un rhomboïde, dans lequel g^2 et p^2 sont des quantités rationnelles (6, 2°.), donnent

$$ma : at :: 2p^2 : g^2 - p^2;$$

donc $ma : ay :: 2p^2 : 2g^2 - 2p^2 :: p^2 : g^2 - p^2$.

Soit *mbc* le triangle mensurateur; désignant par *n* le nombre de rangées soustraites, et par *r* la dimension qui, sur la molécule, répond à *ma*, nous aurons

$$mb : bc :: n \times r : r :: ma : ay :: p^2 : g^2 - p^2.$$

D'où l'on tire, $n : 1 :: p^2 : g^2 - p^2$, et $n = \frac{p^2}{g^2 - p^2}$; c'est-à-dire que la valeur de n est la moitié du rapport entre la ligne *am* prise pour rayon, et le cosinus de l'angle *amh*.

37. La propriété dont il s'agit ne peut convenir qu'à un rhomboïde obtus, en sorte que sa limite répond au cas où le noyau est un cube. Alors $g = p$, et $n = \frac{p^2}{0}$, quantité infinie.

Passé cette limite, l'égalité ne peut subsister entre les angles *dfq*, *dfp* et *qfp* (fig. 17), sans que les faces du dodécaèdre ne s'abaissent en dessous de celles du rhomboïde. Pendant ce mouvement, celles qui étaient les moins inclinées, telles que *pfd*, *pfq* continueront de faire entre elles des angles saillans, égaux aux incidences des faces prises vers un même sommet sur le rhomboïde; mais les plus inclinées, telles que *pfd*, *pbd*, feront entre elles des angles rentrans, en sorte que la supposition présente sort des bornes entre lesquelles sont renfermées les lois de la structure qui excluent ces sortes d'angles dans les cristaux simples.

38. On parviendrait au même résultat, en partant de l'observation que l'angle *dke* (fig. 18) doit être égal à l'angle *mar* (fig. 19), dans le cas de la propriété dont il s'agit, le premier étant la moitié de l'incidence relative aux faces du dodécaèdre, et le second étant la moitié de celle qui a lieu pour les

faces du noyau; et parce que l'on a $mr = de$ (fig. 17) $= g$, on aura aussi $ek = ar$ (fig. 19); or,

$$am = \sqrt{\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2}} \text{ (6, 2°.).}$$

Donc ar ou

$$\sqrt{(am)^2-(mr)^2} = \sqrt{\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2}-g^2} = \sqrt{\frac{3g^2p^2-g^4}{g^2+p^2}}$$

Donc, pour résoudre le problème, il suffira d'égaler cette valeur à celle de ek, qui est

$$\frac{n}{n-1}\sqrt{\frac{\frac{1}{3}a^2g^2}{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2+\frac{1}{36}g^2}} \text{ (32, 2°.).}$$

Substituant dans celle-ci $9p^2 - 3g^2$ à la place de a^2, et faisant les opérations convenables, on trouve

$$n = \frac{p^2}{g^2-p^2},$$

comme ci-dessus. Mais cette solution est beaucoup moins simple que la première.

39. L'espèce de décroissement qui nous occupe a fourni le sujet d'un autre problème qui ne diffère que par le générateur auquel il se rapporte, de celui dont la solution nous a servi à développer les propriétés du dodécaèdre sz (fig. 8). Dans ce dernier solide, le noyau est le rhomboïde dont les faces se confondent avec les plans hsm, mso, osh, etc., et le décroissement a lieu sur les bords supérieurs de ce noyau.

L'autre rhomboïde dont les faces coïncident avec

les plans *hlm*, *mno*, *orh*, etc., a été considéré comme n'étant qu'hypothétique. Ici les lois de la structure suivent l'ordre inverse, en sorte que le problème ramené à ce nouveau point de vue doit être énoncé de la manière suivante.

Tout rhomboïde obtus, dans lequel le rapport de g^a à p^a est rationnel, est susceptible de produire, en vertu d'une loi de décroissement sur les bords D, dont la mesure dépend du même rapport, un dodécaèdre dont voici les propriétés.

1°. La plus petite incidence de deux faces du dodécaèdre, telles que *hsl*, *hsr* (fig. 8), sera égale soit à l'angle plan obtus *hlm* du noyau, soit à la plus grande incidence des faces du rhomboïde hypothétique, par exemple de celles qui se confondent avec les plans *hsm*, *lzn*. Par une suite de la première propriété, les plus grands angles *shl*, *hlz*, etc., des faces du dodécaèdre seront droits, et ses arêtes les plus saillantes, telles que *sh*, seront perpendiculaires chacune sur la face *rhl* du noyau, vers laquelle cette arête est tournée.

2°. L'incidence de deux faces adjacentes, telles que *hls*, *hlz*, prises vers les deux sommets du dodécaèdre, sera égale, d'une part à la plus grande incidence de deux faces du noyau, et d'une autre part à l'angle plan obtus des faces du rhomboïde hypothétique, ou ce qui est la même chose, au supplément de l'angle *hsm*.

Nous avons vu que ces différentes propriétés sont

liées à la condition que l'exposant du décroissement sur les bords supérieurs, que nous désignerons maintenant par n', ait une valeur rationnelle en fonction des demi-diagonales g' et p' du rhomboïde qui dans le cas présent devient hypothétique. Or, en laissant subsister ici cette condition, il ne nous reste qu'à prouver qu'il y a aussi pour l'exposant n du décroissement sur les bords inférieurs, une valeur rationnelle dépendante du rapport entre les demi-diagonales g et p du véritable noyau. Or, il est très facile de s'en convaincre, en faisant attention que les angles *shl*, *shr*, étant droits, chacune des faces *lsh*, *rsh*, est nécessairement perpendiculaire sur le plan *rhl*. Car soit *malh* (fig. 19) la coupe transversale du noyau, prise de manière que le point *m* coïncide avec le point *x* (fig. 8). Menons *mt* (fig. 19) perpendiculaire sur le prolongement du côté *la*, et qui coïncidera avec *tx* (fig. 8) perpendiculaire sur *hl*, en sorte que l'angle droit *tmh* (fig. 19) sera celui que forme la face *lsh* (fig. 8) avec le plan *rhl* qui appartient à l'une des faces du noyau. Soit *mou* (fig. 19) le triangle mensurateur, et *r* la dimension qui, sur la molécule, répond à *ma*. Le calcul relatif à la valeur du cosinus *at* du petit angle *amn* de la coupe transversale donne $ma : at :: 2p^2 : g^2 - p^2 :: mo : ou :: n' + r : r$; d'où l'on tire, $n' = \frac{2p^2}{g^2 - p^2}$, ce qui est l'expression du cosinus du petit angle saillant du noyau, laquelle est semblable à celle que nous avions trouvée pour *n*

décroissement qui donne *hl*

40. On peut obtenir im
de n', en égalant p au cosinu
petite incidence des faces du
ce cas, le calcul est beaucou
sons que les faces dont il s'a
par dpf, qpf (fig. 17). On au

ou $$\frac{n'}{n'-1}\sqrt{\frac{\frac{1}{3}a^2g^2}{\left(\frac{n'+2}{3n'-3}\right)^2 a}}$$

Elevant au carré, $$\frac{3n}{(n'+2)^2a^2}$$

$$3n'^2a^2g^2=(n'+2)^2a^2p^2+$$

Substituant à la place de a^2 se
divisant tout par 3, puis réduis

$$n'^2+n'\frac{(4p^2-4g^2p^2)}{g^2-2g^2p^2+p^2}+\frac{}{g^2-}$$

Si l'on divise les deux termes de

racine est $n' - \frac{2p^2}{g^2-p^2}$. Donc $n' = \frac{2p^2}{g^2-p^2}$ comme ci-dessus.

41. Si l'on substitue cette valeur de n' dans le rapport de mx à bm (fig. 18), ou

$$(n'+1)\sqrt{3p^2-g^2} : (n'-1)\sqrt{g^2+p^2},$$

qui a été trouvé plus haut, et qui donne l'incidence de deux faces adjacentes situées vers les deux sommets du dodécaèdre, on aura

$$mx:bm :: \left(\frac{2p^2}{g^2-p^2}+1\right)\sqrt{3p^2-g^2} : \left(\frac{2p^2}{g^2-p^2}-1\right)\sqrt{g^2+p^2}$$
$$:: (g^2+p^2)\sqrt{3p^2-g^2} : (3p^2-g^2)\sqrt{g^2+p^2}$$
$$:: \sqrt{g^2+p^2} : \sqrt{3p^2-g^2}.$$

Or, ce rapport est celui de ao à bo (p. 285), comme cela doit être, puisque l'incidence dont nous avons parlé est égale à l'angle que font entre elles deux faces situées vers un même sommet du générateur, ainsi que nous l'avons déjà prouvé.

Lorsque $g = p$, on a $n' = \frac{2p^2}{0}$, ce qui signifie que la limite de la propriété dont il s'agit répond au cas où le noyau est un cube.

42. Les formules $n = \frac{p^2}{g^2-p^2}$ et $n' = \frac{2p^2}{g^2-p^2}$ sont susceptibles d'une infinité d'applications différentes, suivant les diverses valeurs que l'on peut supposer pour g et p. Mais parmi ces applications, les seules admissibles sont celles où les valeurs de n et de n'

jacente, en dessous de l'arête *df*. Car cette inclinaison est égale à celle de *dpf* sur *dfqs*, plus à la différence entre cette dernière et celle de *bafd* sur *dfqs*. Or, l'inclinaison de *dpf* sur *dfqs* est de $104^d\,28'\,40''$, d'après ce qui a été dit. Celle de *bafd* sur *dfqs*, supplément de la précédente, est de $75^d\,31'\,20''$. La différence est donc $28^d\,57'\,20''$. Ajoutant cette différence à $104^d\,28'\,40''$, on trouve $133^d\,26'$ pour l'inclinaison cherchée.

41. Soit maintenant *bafd* (fig. 20) le même rhombe que fig. 17. Menons *by* qui coupe *af* en deux parties égales. Je dis que le triangle *bay* est semblable à l'un quelconque *dpf* (fig. 17) des triangles du dodécaèdre secondaire, de manière que les côtés de celui-ci sont doubles de ceux de l'autre.

Evaluons d'abord les trois côtés du triangle *pdf*.

Nous avons, 1°. $df = \sqrt{g^2+p^2} = \sqrt{5}$.

2°. *dp* qui est la même ligne que fig. 16

$$= \sqrt{\left(\frac{2n+1}{3n-3}\right)^2 a^2 + \frac{4}{36}g^2} = \sqrt{\frac{25}{9}\cdot 9 + 4} = \sqrt{29}$$

(voyez 32, 2°.).

3°. *pg* (fig. 16) = *pg* ou *pf* (fig. 17)

$$= \sqrt{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 a^2 + \frac{4}{36}g^2} = \sqrt{\frac{16}{9}\cdot 9 + 4} = \sqrt{20}$$

(voyez 32, 2°.).

Evaluons pareillement les trois côtés du triangle *bay* (fig. 20).

1°. $ay = \frac{1}{2}af = \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{4}df$ (fig. 17).

2°. Ayant mené *ym* perpendiculaire sur *bf* (fig. 20), nous aurons

$$by = \sqrt{(bm)^2 + (my)^2} = \sqrt{(\tfrac{3}{4}bf)^2 + (\tfrac{1}{2}ac)^2}$$
$$= \sqrt{\tfrac{9}{16}\cdot 12 + \tfrac{1}{4}\cdot 2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{29} = \tfrac{1}{2}dp \text{ (fig. 17)}.$$

3°. ab (fig. 20) $= \sqrt{5} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \frac{1}{2}pf$ (fig. 17). Donc, etc.

On voit aussi que le moyen côté *pf* du triangle *dpf* est double du petit côté. Ces résultats sont particuliers à la chaux carbonatée métastatique.

42. Cette variété nous fournit encore le sujet d'un problème dont je donnerai dans la suite une autre solution. Il consiste à déterminer, d'après certaines données, le rapport entre les deux demi-diagonales *g* et *p* du noyau, ce qui permet ensuite de calculer les angles tant de ce noyau que des formes secondaires, avec une précision rigoureuse.

Choisissons pour données l'égalité observée entre les angles *pfd* et *dfq* (fig. 17), et la loi de décroissement par deux rangées, d'où résulte le cristal métastatique; ou, si on l'aime mieux, l'égalité entre la partie de l'axe de ce cristal qui excède celui du noyau de part et d'autre, et cet axe lui-même. Il s'agit, d'après ces deux données, de trouver le rapport entre *g* et *p*.

Pour y parvenir, j'observe que l'angle *pfd* étant égal à l'angle *dfq*, ou, ce qui revient au même, à

l'angle *baf*, les angles *dfk* et *dfa*, qui sont les supplémens des précédens, seront aussi égaux. Donc puisque *df* est égale à *af*, le sinus *dk* de l'angle *dfk* sera égal au sinus *am* (fig. 1) de l'angle *dfa* (fig. 17).

Or $am = \sqrt{\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2}}$.

Reste à trouver *dk*, pour mettre sa valeur en équation avec celle de *am*.

Le triangle *dek* est rectangle en *e*. Car le plan *dfs* étant perpendiculaire sur le plan *afs*, l'est aussi sur le plan *pfs* qui coïncide avec *afs*. Donc puisque *de* est en même temps couchée sur le plan *dfs* et perpendiculaire sur la commune section *fs* de ce plan avec *pfs*, elle sera aussi perpendiculaire sur ce dernier plan. Donc *ke* située sur le prolongement de *pfs*, et qui passe par le pied de *de* sera perpendiculaire sur cette dernière ligne. Donc le triangle *dek* est rectangle.

Donc $dk = \sqrt{(de)^2+(ek)^2}$.

Or $de = g$. $ek = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}a^2g^2}{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2a^2+\frac{1}{3}g^2}}$

(voyez 46). Et parce que $n = 2$,

$$ek = 2\sqrt{\frac{\frac{1}{3}a^2g^2}{(\frac{1}{3})^2a^2+\frac{1}{3}g^2}} = \sqrt{\frac{3a^2g^2}{4a^2+3g^2}};$$

Donc

$$dk = \sqrt{g^2+\frac{3a^2g^2}{4a^2+3g^2}} = \sqrt{\frac{7a^2g^2+3g^4}{4a^2+3g^2}};$$

Egalant les valeurs des carrés de dk et am,

$$\frac{7a^2g^2+3g^4}{4a^2+3g^2}=\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2}.$$

Et substituant à la place de a^2 sa valeur $9p^2-3g^2$,

$$\frac{7g^2(9p^2-3g^2)+3g^4}{4(9p^2-3g^2)+3g^2}=\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2}.$$

D'où l'on tire

$$\frac{7g^2p^2-2g^4}{4p^2-g^2}=\frac{4g^2p^2}{g^2+p^2},$$

et faisant disparaître les deux dénominateurs, puis réduisant et transposant,

$$g^4-\tfrac{9}{2}p^2g^2=-\tfrac{9}{2}p^4.$$

Cette équation donne pour les deux valeurs de g^2,

$$g^2=\tfrac{3}{2}p^2, \text{ et } g^2=3p^2,$$

Dans le premier cas, $g:p::\sqrt{3}:\sqrt{2}$, ce qui est le rapport cherché entre les deux demi-diagonales du rhombe primitif. Dans le second cas,

$$g:p::\sqrt{3}:1,$$

ce qui convient à l'hypothèse dans laquelle le noyau et le cristal secondaire se confondraient sur un même plan, qui serait un hexagone régulier.

43. Le résultat qui donne $n'=4$ est réalisé par la cristallisation dans plusieurs variétés de la même substance, et entre autres dans celle que je nomme *ascendante*. Mais comme les facettes qui en dépen-

dent sont combinées avec d'autres qui appartiennent à des lois différentes de décroissemens, je me réserve à faire connaître la variété dont il s'agit, lorsque je traiterai des formes secondaires composées.

Faisons $g = \sqrt{5}$ et $p = \sqrt{3}$, comme dans l'argent antimonié sulfuré; nous trouverons $n = \frac{3}{2}$, et $n' = 5$. Je n'ai observé jusqu'ici aucun cristal qui offrît l'un ou l'autre de ces résultats; mais leur simplicité peut faire présumer que peut-être on les rencontrera dans quelqu'une des variétés qui seront découvertes dans la suite.

Lorsque $g = \sqrt{2}$, et $p = 1$, on a $n = 1$ et $n' = 2$. L'incidence mutuelle de deux faces situées vers un même sommet sur le rhomboïde qui sert de noyau est alors de 120^d, et celle des faces produites par le décroissement, dans le cas de $n = 1$, étant la même, il est facile d'en conclure qu'elles sont situées comme les pans d'un prisme hexaèdre régulier, et que le solide secondaire est semblable au dodécaèdre rhomboïdal représenté (fig. 21, pl. 2). Mais dans les dodécaèdres de cette forme, qui sont connus jusqu'à présent, toutes les faces sont à la fois ou primitives ou secondaires, et il est très probable qu'il en est de même de ceux qui existent encore à notre insu dans la nature. Ainsi le cas dont il s'agit est étranger à la cristallisation. Mais l'autre cas où $n' = 2$ nous fournira dans la suite une application de la théorie à l'une des formes originaires du même dodécaèdre,

celui-ci pouvant être alors considéré comme un assemblage de quatre rhomboïdes, dont chacun subit le décroissement exprimé par $\dot{D}$.

44. Le résultat $n=1$, que nous venons de voir être purement hypothétique, lorsque $g=\sqrt{2}$ et $p=1$, s'étend généralement à tous les rhomboïdes, quel que soit le rapport de g à p. Pour nous en convaincre, reprenons l'équation ap (fig. 16) $=\frac{1}{n-1}a$. Si l'on fait $n=1$, on aura $ap=\frac{a}{0}$, ce qui indique qu'alors l'axe devient une quantité infinie, et que par conséquent les plans produits par le décroissement sont verticaux, et disposés comme les faces latérales d'un prisme hexaèdre régulier. Il arrive alors que ces plans sont limités soit par des faces parallèles à celles du noyau, soit par d'autres faces dues à une loi différente de décroissement.

La première combinaison existe dans une variété de chaux carbonatée (fig. 21) que je nomme *prismée*, et dont le signe sera $\overset{1}{\underset{P\,u}{PD}}$. L'incidence de u sur u étant évidemment de 120^d, celle de P sur u sera le supplément de la moitié de l'angle que font entre elles deux faces situées vers un même sommet du noyau, c'est-à-dire qu'elle sera égale à

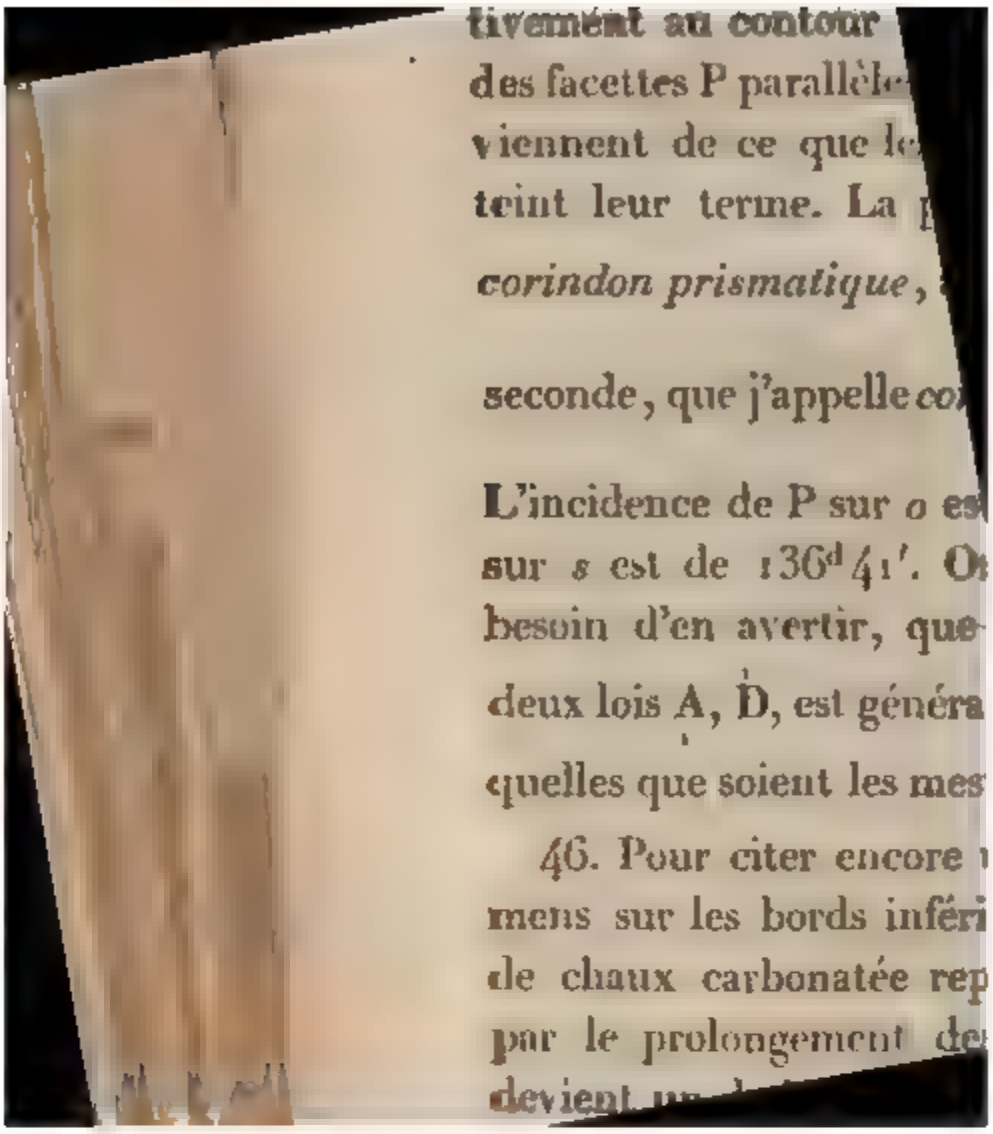
$$180^d - \frac{104^d\,28'\,40''}{2}, \text{ ou à } 127^d\,45'\,40''.$$

Dans une autre variété représentée (fig. 22), les faces u, u se combinent avec celles du rhomboïde équiaxe. Le signe représentatif est alors $\dot{D}\frac{B}{1}$, et la variété prend le nom de *bisunitaire*. Mais on peut aussi supposer que son noyau soit semblable à l'équiaxe, et dans cette hypothèse elle résultera encore de la loi $\dot{D}$. L'incidence de g sur u, prise d'après la même donnée que ci-dessus, est égale à

$$180^d - \frac{134^d\,25'\,38''}{2}, \text{ ou à } 112^d\,47'\,11''.$$

45. Nous avons vu que quand les décroissemens qui agissent sur les angles supérieurs d'un rhomboïde ont lieu par une rangée, il en résulte des faces perpendiculaires à l'axe, qui s'étendraient à l'infini, si elles n'étaient limitées par d'autres faces différemment situées. Dans plusieurs variétés qui appartiennent à diverses espèces, ces mêmes faces se combinent avec celles qui proviennent de la loi $\dot{D}$, et qui sont parallèles à l'axe, en sorte que l'on a ici deux quantités dont la tendance vers l'infini est arrêtée par leurs positions respectives.

La forme dont il s'agit ici, et qui est celle du prisme hexaèdre régulier, existe dans l'espèce du corindon. La figure 23 représente le noyau de ce minéral, qui est un rhomboïde un peu aigu, dans lequel le rapport des diagonales g, p, est celui de $\sqrt{15}$ à $\sqrt{17}$, d'où il suit que l'incidence mutuelle



tivement au contour
des facettes P parallèle
viennent de ce que le
teint leur terme. La
corindon prismatique,

seconde, que j'appelle *co*

L'incidence de P sur *o* es
sur *s* est de 136d 41′. O
besoin d'en avertir, que
deux lois A, D, est généra
quelles que soient les mes

46. Pour citer encore
mens sur les bords inféri
de chaux carbonatée rep
par le prolongement de
devient

ce rhomboïde pour noyau, il est visible que le dodécaèdre résultera d'un décroissement sur ses bords inférieurs D, D. Ce décroissement est mixte, et a pour signe $\overset{\frac{5}{4}}{\underset{\gamma}{\mathrm{D}}}$.

Si l'on applique ici les formules qui ont été données (p. 324 et 325), en faisant $g = \sqrt{12}$, $p = \sqrt{5}$ et $n = \frac{5}{4}$, on trouve que le rapport de *de* à *ek*, ou du sinus de la moitié de l'incidence de γ sur γ, au cosinus, est celui de $\sqrt{185}$ à $\sqrt{75}$, ce qui donne $115^d\,1'\,44''$ pour l'incidence dont il s'agit; et que le rapport de *fc* à *cz*, ou du sinus de la moitié de l'incidence de γ sur γ' ou de γ'' sur γ'' au cosinus, est celui de $\sqrt{233}$ à $\sqrt{27}$, ce qui donne pour cette incidence, $142^d\,24'\,6''$. On trouvera aussi que celle de γ sur γ'' est de $118^d\,29'\,4''$. Dans tous les cristaux observés jusqu'ici (1), les sommets du dodécaèdre sont interceptés par des faces g, g (fig. 8), qui appartiennent au noyau supposé, et dont l'incidence sur les faces γ qui leur sont adjacentes est de $143^d\,32'\,39''$. Nous verrons reparaître dans la suite cette même variété, comme résultat d'un décroissement inter-

(1) M. Mabru, minéralogiste d'un mérite distingué, a découvert cette variété dans le département du Puy de-Dôme. Il avait très bien remarqué qu'elle présentait le rhomboïde équiaxe dont les bords inférieurs étaient remplacés chacun par un double biseau.

médiaire sur les angles latéraux du rhomboïde de $104^d \frac{1}{2}'$.

47. Il existe des formes dans lesquelles les effets des décroissemens sur les bords supérieurs B se combinent avec ceux des décroissemens sur les bords inférieurs D. Or, j'ai trouvé que les intersections mutuelles des faces qui naissaient des deux décroissemens simultanés formaient un hexagone situé sur un plan perpendiculaire à l'axe, toutes les fois que le nombre de rangées soustraites sur B excédait d'une unité celui des rangées soustraites sur D, en sorte que cette propriété avait lieu pour un rhomboïde quelconque, indépendamment du rapport entre les demi-diagonales *g* et *p*.

Il est d'abord facile de voir que les intersections dont il s'agit ont leur origine aux angles latéraux E, E, du rhomboïde primitif. Cela posé, reprenons la figure 5, qui nous a servi pour la théorie des décroissemens sur les bords supérieurs B. D'après ce qui vient d'être dit, le point *x*, situé vis-à-vis du point *g*, qui est un des angles latéraux du rhomboïde primitif, sera le point d'intersectiou de l'arête *am* avec l'arête correspondante produite par le décroissement sur D. Maintenant, dans la figure 16, relative aux décroissemens sur les bords D, la ligne *pd* sera l'arête du dodécaèdre produit par ce genre de décroissement, laquelle en partant de l'angle *d* va rencontrer *am* (fig. 5). Si l'on prolonge *gn* (fig. 16) jusqu'à ce qu'elle coupe en *t* l'arête *pd*, le point *t*

devra se confondre avec le point x (fig. 5), c'est-à-dire que $nx = nt$. Soit n' le nombre de rangées soustraites relatif au décroissement sur B, et n celui qui se rapporte au décroissement sur D; on aura

$$nx\,(\text{fig. 5}) = \frac{n'+1}{2n'-1}\sqrt{\tfrac{4}{36}g^2}.\ (\text{Voy. 10, 2}^e.).$$

$$\text{Maintenant } ap\,(\text{fig. 16}) = \frac{1}{n-1}\sqrt{9p^2-3g^2}.$$

$$pr \text{ ou } ap+ar : dr :: pn : nt;$$

et substituant à la place des trois premiers termes leurs valeurs algébriques,

$$\left(\frac{1}{n-1}+\frac{2}{3}\right)\sqrt{9p^2-3g^2} : \sqrt{\tfrac{4}{36}g^2} :: \left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{3}\right)\sqrt{9p^2-3g^2} : nt.$$

Donc $nt = \frac{n+2}{2n+1}\sqrt{\frac{4}{36}g^2} = \frac{n'+2}{2n'-1}\sqrt{\frac{4}{36}g^2}$. D'où l'on tire $n' = n+1$, comme nous l'avons annoncé.

Parmi les différentes lois de décroissemens qui déterminent les formes des variétés connues de chaux carbonatée, on en connaît huit, dont quatre ont pour expressions $\overset{1}{B}$, $\overset{2}{B}_3$, $\overset{3}{B}_4$, $\overset{5}{B}_6$, et les quatre autres $\overset{1}{D}$, $\overset{2}{D}$, $\overset{3}{D}$, $\overset{5}{D}$, ce qui donne les combinaisons suivantes $\overset{1}{D}\overset{2}{B}$, $\overset{2}{D}\overset{3}{B}$, $\overset{3}{D}\overset{4}{B}$, $\overset{5}{D}\overset{6}{B}$, qui toutes réalisent la propriété que je viens de démontrer. Mais jusqu'ici il n'y a que les deux lois représentées par la seconde, qui soient associées dans une même cristallisation; les autres agissent solitairement dans

la production des formes qui en offrent les résultats. Je citerai pour exemple de la combinaison des deux lois dont il s'agit, la variété de chaux carbonatée que j'ai nommée *soustractive* (fig. 26), et dans laquelle les pans du prisme hexaèdre régulier interviennent avec les faces produites en vertu de ces lois. Son signe est $\overset{a}{e}\overset{a}{D}B$. Voici les mesures de ses angles, abstraction faite de ceux que font entre elles les faces du dodécaèdre métastatique, et que nous avons données plus haut. Incidence de e sur r, 135^d; de d sur r, 152^{d}6′52″; de t sur t, 137^{d}39′26″; de t sur t', 159^d 11′34″. Je parlerai dans la suite d'un autre variété qui réunit aux faces c, r, t d'autres faces dues à un décroissement intermédiaire.

$\overset{}{e}\ \overset{}{r}\ \overset{3}{t}$

IV. *Décroissemens sur les angles latéraux.*

48. Les formes secondaires qui proviennent de cette espèce de décroissement sont en général des dodécaèdres, dans lesquels trois arêtes contiguës à chaque sommet sont parallèles aux diagonales obliques qui leur correspondent sur le noyau. C'est une suite nécessaire de ce que les soustractions se font par des rangées parallèles à ces mêmes diagonales.

49. Soit *ti* (fig. 27) un de ces dodécaèdres, et *to* l'une des arêtes parallèles aux diagonales du noyau. Soit *b* le point de l'arête *tk*, qui se confond avec l'angle solide latéral de ce noyau, ou qui est le point

de départ des décroissemens. Soit *bc* la demi-diagonale horizontale du rhombe sur lequel agissent les mêmes décroissemens. Menons *be* perpendiculaire sur *to*, et joignons les points *c*, *e*, par une droite. Soit *bnm* le triangle mensurateur; désignons par g' la demi-diagonale horizontale de la molécule. Nous aurons $bn = 2ng'$. Quant à *nm*, elle coïncide avec la face latérale correspondante de la première lame de superposition, et de plus elle mesure la hauteur de cette face. Soit *as* (fig. 28) le noyau représenté séparément avec une position analogue à celle qu'il a dans l'intérieur du dodécaèdre. On concevra, avec un peu d'attention, que la face latérale dont nous venons de parler étant contiguë à une suite d'arêtes de molécule, situées parallèlement à *ag* et *ds*, doit être elle-même parallèle à la coupe principale qui passe par les points *a*, *d*, *s*, *g*. Et puisque *nm* (fig. 27) mesure la hauteur de cette face latérale, elle sera égale à la hauteur d'une molécule, ou à la ligne *ak* (fig. 2), en supposant que *adsg* représente la coupe principale de la molécule. Donc nous aurons

$$nm\,(\text{fig. 27}) = \sqrt{\frac{3g'^2p'^2 - g'^4}{p'^4}}\ (\text{v. 6, 3°.}).$$

Donc

$$bn : nm :: 2gn : \sqrt{\frac{3g^2p^2 - g^4}{p^4}} :: 2n : \sqrt{\frac{3p^2 - g^2}{p^2}},$$

en substituant g à g' et p à p', parce que les dimensions de la molécule sont proportionnelles à celles du noyau.

50. Cherchons maintenant les incidences respectives des faces du dodécaèdre, en commençant par celle de *pto* (fig. 27) sur *kto*.

Il est facile de voir que l'angle *bec* est égal à la moitié de cette incidence, et parce que l'angle *bce* est droit, les deux triangles *bnm*, *bce*, sont semblables.

Donc

$$bc:ce::bn:nm::2gn:\sqrt{\frac{3g^2p^2-g^4}{p^2}}::2n:\sqrt{\frac{3p^2-g^2}{p^2}}.$$

Avant de chercher la seconde incidence, ou celle de *otk* sur *rth*, déterminons la partie de l'axe du dodécaèdre, qui excède de chaque côté de l'axe du noyau.

Soit *adsg* (fig. 29) la coupe principale de ce noyau, *to* une arête du cristal secondaire parallèle à la diagonale *ad*, et *io* l'arête inférieure contiguë à la précédente. Du point *a* et du milieu *c* de *ad*, menons *ax* et *ce* perpendiculaires l'une et l'autre sur *to*.

Les triangles semblables *axt*, *aks* donnent

$$ak:as::ax=ce:at.$$

Or, $ak=\sqrt{\frac{3g^2p^2-g^4}{p^2}}$. $as=\sqrt{9p^2-3g^2}$. *ce* étant la même ligne que fig. 27, nous avons

$$bc=g:ce::2gn:\sqrt{\frac{3g^2p^2-g^4}{p^2}}.$$

Donc $ce=\frac{1}{2n}\sqrt{\frac{3g^2p^2-g^4}{p^2}}$.

Ainsi la proportion deviendra

$$\sqrt{\frac{3g^2p^2-g^4}{p^2}} : \sqrt{9p^2-3g^2} :: \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{3g^2p^2-g^4}{p^2}}$$

$$: at = \frac{1}{2n}\sqrt{9p^2-3g^2}.$$

Supposons un plan *oyr* (fig. 27) perpendiculaire à l'axe. Soient *oty*, *rty* (fig. 30) les portions des triangles *otk*, *rtk* (fig. 27) interceptées par ce plan. Soit de plus *tn* la partie correspondante de l'axe, que nous supposerons égale à *tn* (fig. 29). Ayant mené *on*, *rn* et *yn* (fig. 30), nous aurons *yn* égale à *gn* (fig. 29), et *on* ou *rn* (fig. 30) égale à *nl* (fig. 29), ou au prolongement de *gn* jusqu'à la rencontre de *to*.

Menons *oz* (fig. 30) perpendiculaire sur *ty*, *op* perpendiculaire sur *ny*, puis joignons les points *z*, *p*, par une droite. L'angle *ozp* sera la moitié de celui qui mesure l'incidence de *otk* (fig. 27) sur *rtk*. Cherchons le sinus *op* (fig. 30) et le cosinus *pz* de l'angle *ozp*.

1°. Pour *op*. A cause de l'angle $onp = 60^d$ et de l'angle droit *opn*, $op = on\sqrt{\frac{3}{4}}$. Cherchons *on* ou son égale *nl* (fig. 29). Les triangles semblables *adr*, *tln* donnent

$$ar : dr :: tn : nl :: at + an : nl.$$

Ou $\frac{1}{3}\sqrt{a^2} : \sqrt{\frac{4}{18}g^2} :: \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{a^2} : nl$

$$= \frac{2n+3}{2n}\sqrt{\frac{1}{18}g^2} = on.$$

Donc $op = \frac{2n+3}{2n}\sqrt{\frac{1}{3}g^2} \times \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{2n+3}{4n}\sqrt{g^2}$.

2°. Pour *pz*. Les triangles semblables *tny*, *pzy* (fig. 30) donnent $ty : tn :: py : pz$.

$$tn = \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{3}\right)\sqrt{a^2} = \frac{2n+3}{6n}\sqrt{a^2}.$$

$$ty = \sqrt{tn^2 + yn^2} = \sqrt{\left(\frac{2n+3}{6n}\right)^2 a^2 + \frac{1}{3}g^2}.$$

$$py = yn - pn = yn - \tfrac{1}{2}on = \sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} - \frac{2n+3}{4n}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}$$

$$= \left[2 - \left(\frac{2n+3}{4n}\right)\right]\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} = \frac{6n-3}{4n}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}.$$

Donc la proportion $ty : tn :: py : pz$ devient

$$\sqrt{\left(\frac{2n+3}{6n}\right)^2 a^2 + \frac{1}{3}g^2} : \frac{2n+3}{6n}\sqrt{a^2} :: \frac{6n-3}{3n}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}$$

$$: pz = \frac{\frac{(2n+3)(6n-3)}{4n.6n}\sqrt{\frac{1}{3}a^2g^2}}{\sqrt{\left(\frac{2n+3}{6n}\right)^2 a^2 + \frac{1}{3}g^2}}$$

Comparant *op* avec *pz*, on trouvera

$$op : pz :: \sqrt{\left(\frac{2n+3}{6n}\right)^2 a^2 + \frac{1}{3}g^2} : \frac{2n-1}{2n}\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2}.$$

51. Les cristaux de chaux carbonatée et ceux de tourmaline fournissent des exemples de l'espèce de décroissement dont il s'agit ici. Mais les facettes qui en dépendent se trouvent combinées, dans ces cristaux, avec d'autres dont la détermination se rapporte à des lois qui ne seront démontrées que dans la

suite. Pour citer un exemple qui ne suppose rien que de connu, je choisirai la variété de fer oligiste représentée (fig. 31), et que je nomme *unisénaire*. Son signe, qui est $PAE^{66}E$, indique que sa surface

$$P\,\frac{1}{o}\,g$$

est composée de six pentagones P parallèles aux faces du noyau (fig. 32), de deux triangles équilatéraux *o* (fig. 31), qui remplacent les sommets du même noyau, et résultent d'un décroissement par une rangée sur les angles A (fig. 32), et de douze triangles scalènes *g*, *g*, etc. (fig. 31), disposés deux à deux à la place des angles solides E, E (fig. 32), et produits par des soustractions de six rangées sur les mêmes angles. Le rapport entre les demi-diagonales *g* et *p* du noyau étant, comme je l'ai dit plus haut, celui de $\sqrt{9}$ à $\sqrt{10}$, on trouvera d'abord l'incidence de *o* sur P (fig. 31), en prenant le supplément de l'angle *tln* (fig. 29), ou de son égal *acn*, d'après le rapport entre *cn* et *an*, qui est celui de *g* à $\sqrt{3p^2-g^2}$, ou de $\sqrt{9}$ à $\sqrt{21}$. Cette incidence est de $123^d\,14'$. Maintenant les formules relatives aux faces *g*, *g* (fig. 31), donnent d'une part

$$bc\,(\text{fig. } 27) : ce :: \sqrt{120} : \sqrt{7},$$

en faisant attention que $n=3$; et d'une autre part,

$$op\,(\text{fig. } 30) : pz :: \sqrt{333} : \sqrt{175}.$$

D'après la première, l'angle $bec = 76^d\,25'$; ajoutant 90^d, on a $166^d\,25'$, pour l'incidence de *g* sur P

(fig. 31). D'après la seconde, *ozp* (fig. 30)$=54^d3'$; doublant cet angle, on a $108^d6'$, pour l'incidence de *g* sur *g*.

53. A mesure que la loi du décroissement varie, trois des arêtes longitudinales contiguës à chaque sommet, telles que *to*, *tr*, etc. (fig. 27), conservent la même inclinaison par rapport à l'axe, puisqu'elles sont constamment parallèles aux diagonales obliques du noyau, tandis que les trois arêtes intermédiaires *tp*, *tk*, etc., changent continuellement d'obliquité à l'égard de l'axe, en restant fixes, par les points *b*, *f*, etc., qui sont les termes de départ du décroissement. Supposons que les choses étant dans l'état que présente la figure, la loi du décroissement devienne plus rapide; les arêtes *to*, *tr*, se rapprocheront des faces du noyau, en sorte qu'elles iront couper le prolongement de l'axe dans un point situé en dessous de *t*; d'où il suit que les arêtes *tp*, *tk*, etc., feront avec l'axe des angles plus ouverts. Supposons au contraire que la loi du décroissement devienne moins rapide; les arêtes *to*, *tr*, s'écarteront des faces du noyau, en sorte qu'elles rencontreront le prolongement de l'axe au-dessus de *t*, et ainsi les angles que font avec le même axe les arêtes *tp*, *tk*, se trouveront diminués. Il y a donc un terme où les six arêtes contiguës à l'axe étant également inclinées, les arêtes latérales *po*, *ok*, *kr*, etc., se trouvent sur un même plan perpendiculaire à l'axe, de manière que le solide prend la forme d'un dodécaèdre com-

posé de deux pyramides droites réunies par leurs bases. Cherchons si ce résultat peut être produit par une loi régulière de décroissement.

Il est évident que, dans ce cas, gn (fig. 29) $= nl$, ou $\sqrt{\frac{4}{3}g^2} = \frac{2n+3}{2n}\sqrt{\frac{1}{3}g^2}$, ce qui donne $n = \frac{3}{4}$; c'est-à-dire que le décroissement a lieu par trois rangées.

54. On connaît une variété de corindon que je nomme *ternaire*, et qui offre ce résultat dans toute sa simplicité. La figure 33 la représente, et l'on voit (fig. 23, pl. 16) le rhomboïde qui est sa forme primitive. Les incidences des faces r, r (fig. 33), situées vers un même sommet étant toutes égales entre elles, il suffit, pour les déterminer, d'employer une des deux formules trouvées précédemment. Si l'on choisit la première, comme la plus simple, c'est-à-dire celle qui donne le rapport de bc à ce (fig. 27), et que l'on fasse $g = \sqrt{15}$, $p = \sqrt{17}$, $n = \frac{3}{4}$, on aura $128^d\,14'$, pour l'incidence de r sur r. Quant à celle de r sur r', on la trouvera, en faisant attention que la ligne menée du centre de la base commune des deux pyramides à l'un des angles, est à la hauteur de l'une ou l'autre pyramide comme $ln : tn$ (fig. 29), ou comme $cn : an$. Or $cn = \sqrt{\frac{1}{3}g^2} = \sqrt{5}$, $an = \frac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2} = \sqrt{12}$. D'après ces données, l'incidence de r sur r' est de $121^d\,34'$.

55. Dans la variété de fer oligiste appelée *trapézienne*, et que l'on voit figure 34, l'effet de la même

loi se combine avec celui de la loi qui donne des faces perpendiculaires à l'axe, en sorte que le signe rapporté au noyau (fig. 32) est $E^{33}\frac{n}{n}\frac{1}{o}EA$. L'incidence de *o* sur *n* est de 119d 34′; celle de *n* sur *n* est de 128d 26′, et celle de *n* sur *n*′, de 120d 52′.

Une autre variété de la même substance, que l'on voit fig. 35, et que j'appelle *binoternaire*, a pour signe $PE^{33}\frac{n}{n}EA$. Elle diffère de la variété birhomboïdale (fig. 12, pl. 15) déjà décrite plus haut, par l'addition des facettes *n*, *n* (fig. 35), qui tendent à produire le dodécaèdre pyramidal. L'incidence de P sur *n* est de 154d 13′.

Cette forme est celle que présentent le plus communément les cristaux de la célèbre mine de fer de l'île d'Elbe. Elle avait été regardée par Stenon (1) et par Romé de l'Isle (2), comme n'étant autre chose qu'un cube diversement tronqué sur ses angles solides. Dans cette opinion, que j'avais d'abord suivie moi-même, les incidences des faces additionnelles sur les faces P, calculées d'après les lois qu'indique le signe représentatif, offraient des différences assez légères avec les véritables pour échapper à l'attention. Par exemple, l'incidence de P sur *n* se trouvait de 154d 45′ au lieu de 154d 13′, et parce que les

(1) Collection académ., partie étrangère, t. IV, p. 400.
(2) Cristallogr., t. III, p. 189 et suiv.

cristaux de l'île d'Elbe sont situés ordinairement dans leurs groupes, de manière qu'il est plus aisé de mesurer les inclinaisons des faces secondaires sur les primitives, que celles de ces dernières l'une sur l'autre, je m'étais cru dispensé de cette seconde mesure, et il semblait que le gonyomètre ne dût rien m'apprendre à cet égard que ce qu'on savait d'avance. Je fus tiré d'erreur par diverses considérations (1), et entre autres par celle d'une espèce d'anomalie qu'offrirait, dans le cas présent, la forme cubique, en faisant la fonction de rhomboïde, de manière qu'il faudrait concevoir un axe passant par deux angles solides opposés, qui devraient être considérés comme sommets ; et les lois de décroissement qui agiraient autour de ces sommets seraient différentes de celles qui se rapporteraient aux angles latéraux. Ayant rencontré enfin des cristaux sur lesquels deux faces P situées vers un même sommet se prêtaient à la mesure immédiate de leur incidence mutuelle, je trouvai que celle-ci n'était que d'environ 87^d au lieu de 90^d, et cette observation, que j'ai répétée depuis un grand nombre de fois, fit rentrer la cristallisation du fer de l'île d'Elbe dans l'analogie des rhomboïdes, et prouva que la nature ne cessait point ici d'être d'accord avec elle-même.

Quelquefois les faces g, g (fig. 31), s'ajoutent à

(1) Voyez le Traité de Minéral., t. IV, p. 49 et suiv., première édition.

30. Si l'on fait
des faces produite
gles latéraux, de
à r, r, ou à r', r'
deux sur des arêtes
(*fig.* 23, pl. 16)
entre elles des angle
un cas où elles coïn
alors le dodécaèdre
bonde. A ce terme le
ozp s'évanouit. Repre
tique de pz (*voyez* p.
suite son dénominateu

$$(3n+3)(6n-$$

ou simplement, $6n-3$
ce qui indique que le c
féremment pour tous les
dém

aura

$$oz : tz :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{1}{2}\sqrt{9p'^2 - 3g'^2} :: 2g' : \sqrt{3p'^2 - g'^2}.$$

D'une autre part, ot étant parallèle à ad, on aura

$$oz : tz :: dr : ar :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \tfrac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2} :: g : \sqrt{3p^2 - g^2}.$$

Or,

$$at = \frac{1}{2n}\sqrt{9p^2 - 3p^2} = \sqrt{9p^2 - 3g^2}, \text{ à cause de } n = \tfrac{1}{4}.$$

Donc l'axe du noyau est le tiers de celui du rhomboïde secondaire. Donc $\sqrt{3p^2 - g^2} = \frac{1}{3}\sqrt{3p'^2 - g'^2}$. Donc aussi $g = \frac{1}{3} \cdot 2g'$, et $g' = \frac{3}{4}g$.

Si dans l'équation précédente on met $\frac{9}{4}g^2$ à la place de g'^2, elle devient

$$\sqrt{3p^2 - 3g^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3p'^2 - \tfrac{9}{4}g^2}, \text{ ou } 27p^2 - 9g^2 = 3p'^2 - \tfrac{9}{4}g^2.$$

Donc $9p^2 - 3g^2 = p'^2 - \frac{3}{4}g^2$; d'où l'on tire,

$$p' = \tfrac{3}{2}\sqrt{4p^2 - g^2}.$$

57. Si l'on fait $g = \sqrt{3}$ et $p = \sqrt{2}$, on trouve

$$g' : p' :: \sqrt{3} : \sqrt{5}.$$

Ce résultat a lieu dans une variété de chaux carbonatée que j'ai nommée *inverse*, et dont j'ai développé plus haut la structure à l'aide de la méthode synthétique.

C'est à cette même variété que se rapportent les rhomboïdes connus sous le nom de *grès cristallisé de Fontainebleau*, et qui, selon les expériences de

M. Sage, contiennent environ $\frac{3}{5}$ de matière quarzeuse sur $\frac{2}{5}$ de chaux carbonatée. La formation de ces rhomboïdes, dont plusieurs sont isolés et parfaitement prononcés, offre un exemple remarquable de la grande puissance de la cristallisation. Ils ont été produits dans des cavités où la matière du grès, par l'effet d'une cause quelconque, avait subi dans sa contexture un relâchement qui l'avait réduite à l'état de sable. Un liquide chargé de chaux carbonatée, amené par l'infiltration dans ces cavités, a pénétré à travers les interstices des grains quarzeux, et les molécules calcaires ont ensuite enveloppé et saisi ces mêmes grains, sans rien déranger, en même temps qu'elles prenaient, relativement les unes aux autres, des positions conformes aux lois d'une aggrégation régulière, en sorte que les grains quarzeux n'ont fait qu'interrompre la continuité de la structure, en laissant subsister son mécanisme.

De plus, lorsque la matière calcaire rencontrait dans le sable un espace vide, elle y formait des cristaux purs et transparens, que l'on trouve quelquefois accolés à ceux qui sont mélangés de quarz. Il y a même des cristaux qui ont une partie à l'état de pureté et l'autre à celui de mélange, sans que ce défaut d'homogénéité ait nui au niveau des faces, non plus qu'à la direction des joints naturels que l'on suit de l'œil dans les deux parties, lorsqu'on fait mouvoir à la lumière les fractures des cristaux dont il s'agit.

58. Si l'on suppose toujours que le rapport des

demi-diagonales du rhomboïde primitif soit celui de $\sqrt{3}$ à $\sqrt{2}$, on prouve que le rhomboïde secondaire qui en dérive, à l'aide de la loi E''E, a cette propriété remarquable, que ses angles plans sont égaux aux incidences respectives du rhomboïde primitif, et réciproquement. De plus, les angles plans de la coupe principale sont les mêmes de part et d'autre.

Reprenons les formules relatives à ces trois espèces d'angles (6, 1°., 2°. et 3°.).

1°. Pour l'angle plan aigu,

$$r : \text{cosin.} :: g^2 + p^2 : \pm g^2 \mp p^2.$$

2°. Pour la plus petite incidence des faces,

$$r : \text{cosin} :: 2p^2 : \pm g^2 \mp p^2.$$

3°. Pour l'angle aigu de la coupe principale,

$$\text{sin} : \text{cosin} :: \sqrt{3g^2p^2 - g^4} : \pm g^2 \mp p^2.$$

Or, si l'on fait $g = \sqrt{3}$, $p = 2$, comme dans le rhomboïde primitif, et que l'on prenne les signes supérieurs, le premier rapport devient 5 : 1; le second, 4 : 1; et le troisième, 3 : 1.

Et si l'on fait $g = \sqrt{3}$, $p = \sqrt{5}$, comme dans le rhomboïde secondaire, et que l'on prenne les signes inférieurs, le premier rapport devient 4 : 1; le second, 5 : 1; et le troisième, 3 : 1. Donc il y a identité relativement au troisième angle, et à l'égard des deux autres il y a inversion, ce qui a suggéré le nom de *chaux carbonatée inverse*, que j'ai donné à cette

variété. Je prouverai dans la suite qu'il y a pour chaque rhomboïde une loi particulière de décroissement qui dépend du rapport entre g et p, et dont le résultat est un rhomboïde secondaire qui jouit des mêmes propriétés.

59. Il existe une variété de fer oligiste que j'appelle *fer oligiste soustractif*, qui est représentée (fig. 37), et qui parmi ces différentes faces en a six désignées par u, u, etc., et produites en vertu de la loi E''E. Son signe rapporté au noyau (fig. 31) est $\dot{D}PE^{33}EE''EA$. Incidence de k sur n, 150d 26′; de $\overset{k}{P}$ sur $\overset{u}{u}$, 128d 29′.

Il est remarquable que les faces u, u' soient des rhombes, quoique les faces k, k, d'une part, et n, n, de l'autre, dont les intersections avec les faces u, u', déterminent les figures de celles-ci, aient des inclinaisons différentes. Ce résultat, dont la cristallisation offre divers exemples, dépend de certaines conditions que je vais faire connaître.

Soient *opn*, *lnp* (fig. 38.), deux faces triangulaires ou de toute autre figure, qui aient entre elles des inclinaisons quelconques, pourvu qu'elles soient également inclinées sur le plan *onl*; et *ozn*, *lzn*, deux autres faces réunies aux premières sur les arêtes *on*, *ln*, et qui peuvent de même être inclinées entre elles de telle quantité qu'on voudra, pourvu qu'elles le soient également sur le plan *onl*. Ayant mené *nt* qui divise en deux parties égales l'angle *onl*, je prends

sur l'une ou l'autre des arêtes *np*, *nz*, par exemple sur la première, un point quelconque *s*, et de ce point je mène sur *nt* la ligne *sg* parallèle à l'autre arête *nz*, puis ayant divisé en deux la ligne *ng*, je mène par le point *c* de division la ligne *scy* jusqu'à la rencontre de *nz*, et par cette dernière ligne je fais passer un plan *sryu*, dont la section *ru* avec le plan *onl* est perpendiculaire sur *ng*. Je dis que ce plan est un rhombe. Car les triangles *ncy*, *gcs*, sont semblables et égaux, puisque d'une part les angles *scg*, *ycn*, *cgs*, *cny*, sont égaux deux à deux, et que d'une autre part $cg = cn$ par la construction. Donc $cs = cy$. De plus, il est aisé de voir que $cr = cu$. Donc les diagonales *sy*, *ru*, étant perpendiculaires l'une sur l'autre, il en résulte que les côtés *rs*, *ry*, *su*, *yu*, sont égaux entre eux, et que la face *sryu* a la figure d'un rhombe.

Imaginons maintenant que les diverses faces représentées par la figure 38 prennent de telles positions relatives, que *psro*, *psul*, deviennent parallèles à n'', n'' (fig. 37), *oryz*, *luyz* (fig. 38), parallèles à k'', k'' (fig. 37), et *sryu* (fig. 38), parallèle à u' (fig. 37), il est évident que le plan *onl* deviendra perpendiculaire sur les faces *oryz*, *luyz*, et que la section *ru* du plan *sryu* sur le plan *onl* sera toujours perpendiculaire à la ligne *nt*. Si en même temps *sg* devient parallèle à *nz*, elle sera aussi perpendiculaire sur *nt*. Reste à prouver que, dans cette hypothèse, on a $cg = \frac{1}{2}gu$.

Supposons que la construction de la figure 29 se rapporte à l'effet de la loi $E^{2}E$, qui donne les faces n'', n'' (fig. 37), auquel cas

$$at\,(\text{fig. } 29) = \frac{1}{2n}\sqrt{9p^2 - 3g^2} = \tfrac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2};$$

la ligne tp (fig. 29) sera parallèle à l'arête γ (fig. 37), et en même temps à la ligne pn (fig. 38), et l'on aura

$$ng : gs :: pr\,(\text{fig. } 21) : tr :: gn : nt :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : an + at = \tfrac{2}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

Supposons d'une autre part que la construction de la figure 29 se trouve ramenée à l'effet de la loi $E''E$ qui donne la face u' (fig. 37), auquel cas

$$at\,(\text{fig. } 29) = \sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

La ligne tp deviendra alors parallèle à la face u' (fig. 37), et en même temps à la ligne cs (fig. 38), et l'on aura,

$$cg : gs :: pr\,(\text{fig. } 29) : tr :: gn : nt :: \sqrt{\tfrac{4}{36}g^2} : an + at = \tfrac{4}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2} :: \sqrt{\tfrac{1}{36}g^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

Comparant cette proportion avec la précédente, on en conclura que cg (fig. 38) $= \frac{1}{2}gn$, ce qu'il fallait prouver. Donc la position de la face u' (fig. 37) remplit les conditions requises pour que cette face ait la figure d'un rhombe.

60. Je terminerai cet article par la solution d'un

problème qui a beaucoup d'analogie avec un autre que j'ai résolu précédemment, et dont le sujet était une série de rhomboïdes engendrés les uns par les autres à l'aide du décroissement B. substituons à ce décroissement celui qui a pour signe $E^{n}E$, et supposons que chaque rhomboïde de la série soit susceptible de naître du précédent, en vertu de la loi que représente ce signe. Désignant toujours par g et p les demi-diagonales de l'un d'eux qui soit compris entre les extrêmes, et auquel nous donnons le nom de générateur, nous aurons de même deux séries, l'une descendante, composée de rhomboïdes plus petits que le générateur, l'autre ascendante, composée de ceux qui ont de plus grandes dimensions.

Soient γ et π les demi-diagonales d'un rhomboïde du rang r, pris dans la série ascendante. D'après ce qui a été dit plus haut (56), si $r=1$, on a $\gamma=\frac{3}{2}g$; si $r=2$, on a $\gamma=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}g=(\frac{3}{2})^{2}g$; si $r=3$, on a $\gamma=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot g=(\frac{3}{2})^{3}g$. En général, $\gamma=(\frac{3}{2})^{r}g$, et $\gamma^{2}=(\frac{9}{4})^{r}g^{2}$.

De plus, lorsque $r=1$, l'axe du rhomboïde secondaire est triple de celui du noyau (56). Donc, dans ce cas,

$$\sqrt{3\pi^{2}-\gamma^{2}}=3\sqrt{3p^{2}-g^{2}}, \text{ ou } 3\pi^{2}-\gamma^{2}=9(3p^{2}-g^{2}).$$

Lorsque $r=2$, $\sqrt{3\pi^{2}-\gamma^{2}}=3\,.\,3\sqrt{3p^{2}-g^{2}}$, ou $3\pi^{2}-\gamma^{2}=9\,.\,9(3p^{2}-g^{2})$. En général,

$$3\pi^{2}-\gamma^{2}=9^{r}(3p^{2}-g^{2}). \text{ Mais } \gamma^{2}=(\tfrac{9}{4})^{r}g^{2}.$$

Donc $3\pi^2-(\frac{2}{4})^2g^2=g^2(3p^2-g^2.)$

$3\pi^2=g^2(3p^2-g^2)+(\frac{2}{4})^2g^2$; $\pi^2=g^2(p^2-\frac{1}{3}g^2)+$

$=g^2\left(p^2-\frac{1}{3}g^2+\frac{1}{3.4^2}g^2\right)=g^2(p^2+\frac{1}{5.4^2}\cdot 5^2-$

$=g^2\left(p^2+\frac{1-4^2}{3.4^2}g^2\right)$. Donc $\pi=3^r\sqrt{p^2+\frac{1-}{3.4}}$

Désignons par γ', π', les demi-diagonales d
rhomboïde du rang r', pris dans la série descend
Si $r=1$, on aura $\gamma'=\frac{2}{3}g$; si $r=2$, on aura $\gamma'=\frac{1}{1}$
En général, $\gamma'=(\frac{2}{3})^r g$, et $\gamma'^2=(\frac{4}{9})^r g^2$. De plus, si $r=$
on aura

$\sqrt{3\pi'^2-\gamma'^2}=\frac{1}{3}\sqrt{3p^2-g^2}$, ou $3\pi'^2-\gamma'^2=\frac{1}{9}(3p^2-$

Si $r=2$, on aura $\sqrt{3\pi'^2-\gamma'^2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3p^2-$

ou $$3\pi'^2-\gamma'^2=\frac{1}{9\cdot 9}(3p^2-g^2).$$

En général, $3\pi'^2-\gamma'^2=\frac{1}{9^r}(3p^2-g^2)$.

Mais $$\gamma'^2=(\tfrac{4}{9})^r g^2.$$

Donc, $3\pi'^2-(\frac{4}{9})^r g^2=\frac{1}{9^r}(3p^2-g^2)$.

Donc,

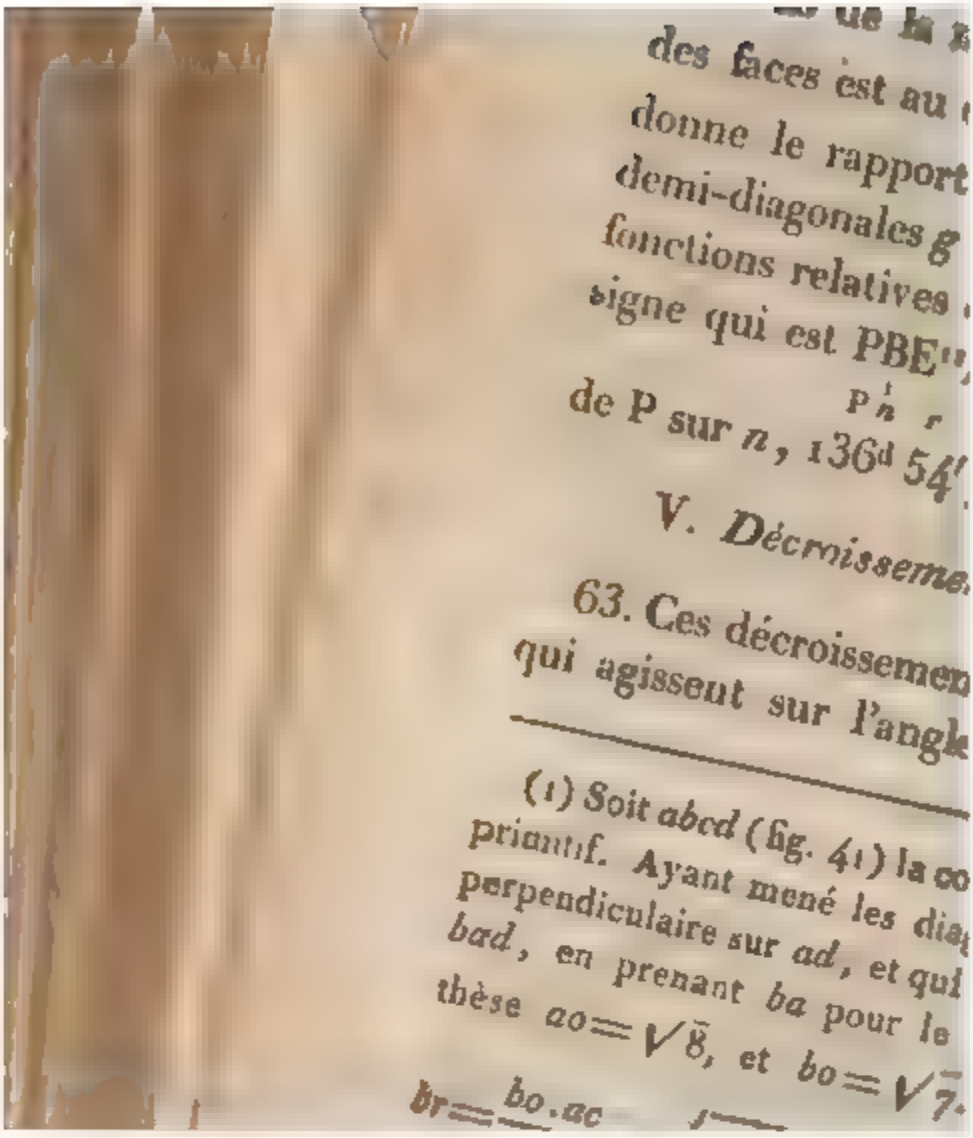
$\pi'=\sqrt{\frac{1}{9^r}(p^2-\frac{1}{3}g^2)+(\frac{4}{9})^r g^2}=\frac{1}{3^r}\sqrt{p^2-\frac{1}{3}g^2+4^r\cdot\frac{1}{3}g^2}$

$=\frac{1}{3^r}\sqrt{p^2+\frac{4^r-1}{3}g^2}$.

61. Si l'on compare les formules précédentes avec celles que nous avons obtenues pour les rhomboïdes

ui naissent du décroissement $\overset{1}{B}$, on verra que celles ui sont données par les séries ascendantes ou des-ndantes sont les mêmes de part et d'autre, à la ifférence près du facteur 3^r ou $\frac{1}{3^r}$, qui multiplie les ormules auxquelles nous venons de parvenir, et qui est nul dans les autres. On concevra la raison de cette différence, en faisant attention que dans le cas du décroissement $\overset{1}{B}$, l'axe est le même pour tous les rhomboïdes des deux séries, au lieu que dans le cas du décroissement E''E, l'axe croît ou décroît suivant que les rhomboïdes appartiennent à une série ou à l'autre. A l'égard de l'identité qui existe d'ailleurs entre les formules données par les deux espèces de décroissement, elle provient de ce que le même rhomboïde qui est produit par tel autre, en vertu du décroissement $\overset{1}{B}$, peut à son tour en produire un semblable à ce dernier, à l'aide du décroissement E''E, ou réciproquement. Ainsi, pour nous borner aux rhomboïdes connus jusqu'ici, savoir, ceux que j'ai nommés *équiaxe*, *primitif et inverse*, et qui appartiennent à la chaux carbonatée, on trouvera que l'équiaxe qui naît du primitif, par le décroissement $\overset{1}{B}$, peut le produire par le décroissement E''E, et que l'inverse qui dérive du primitif, par le décroissement E''E, peut lui donner naissance par le décroissement $\overset{1}{B}$.

62. Il existe une variété de chabasie représentée



de la
des faces est au
donne le rapport
demi-diagonales g
fonctions relatives
signe qui est PBE$^{n}_{r}$
de P sur n, 136^{d} 54$^{\prime}$.

V. Décroissemen

63. Ces décroissemen
qui agissent sur l'angl

(1) Soit *abcd* (fig. 41) la co
priantif. Ayant mené les dia
perpendiculaire sur *ad*, et qui
bad, en prenant *ba* pour le
thèse $ao = \sqrt{8}$, et $bo = \sqrt{7}$.
$br = \frac{bo.ac}{}$

produisent en général des rhomboïdes, soit parce qu'ils peuvent avoir lieu directement ou par renversement, en sorte que tantôt les faces produites s'inclinent vers la partie supérieure de l'axe, et tantôt elles se rejettent en sens contraire vers la partie inférieure. Occupons-nous d'abord des décroissemens directs.

Soit toujours *adsg* (fig. 42) la coupe principale du noyau, et soit *pm* la diagonale oblique du rhomboïde secondaire, et *mu* l'arête inférieure contiguë à cette diagonale. Le triangle mensurateur *dho* ne différera point de celui que nous avons considéré (p. 321) dans le cas des décroissemens sur les bords inférieurs (fig. 16), et nous aurons encore ici,

$$dh\,(\text{fig. } 42) : oh :: 2np : \sqrt{g^2+p^2}.$$

Seulement le nombre de diagonales soustraites qui était égal au nombre de rangées soustraites dans le cas précédent, indiquera un nombre double de rangées soustraites. Nous aurons aussi, en suivant la même marche pour le calcul,

$$ap = \frac{1}{n-1}\sqrt{9p^2-3g^2}. \text{ (Voyez 31.)}$$

Cherchons les expressions des deux diagonales γ et π du rhomboïde secondaire.

Ayant mené *mz* perpendiculaire sur *pu*, nous aurons les triangles semblables *drp*, *mzp*, qui donnent

$$dr : pr :: mz : pz ;$$

$$g:\gamma :: \frac{2n+1}{3n-3} : \frac{2}{3}\left(\frac{n}{n}\right.$$

Maintenant pu

$$\sqrt{9\pi^2-3\gamma^2}=\left(1+\frac{}{n}\right.$$

Et à cause de $\gamma^2=$

$$9\pi^2-3\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)$$

D'où l'on tire

$$\pi=\sqrt{\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2(p^2-$$

$$=(n+1)\sqrt{\left(\frac{1}{n-1}\right)^2($$

64. Cherchons de suit

qui, dans les

adjacente; d'où l'on voit que *ou* répondra à une arête *ds* du noyau, et *op* à une diagonale oblique *ad*. Soit *dhe* le triangle mensurateur, dans lequel

$$dh : eh :: 2np : \sqrt{g^2 + p^2}.$$

Ayant mené *al* prolongement de *ad*, nous aurons les triangles semblables *pal*, *psg*, qui donnent

$$gs : as + ap :: al : ap.$$

Or, $gs = 2p$. $as = \sqrt{9p^2 - 3g^2}$.

Reste à trouver *al*. Les triangles semblables *gal*, *dhe*, donnent $eh : dh :: ga : al$.

Ou $\sqrt{g^2 + p^2} : 2np :: \sqrt{g^2 + p^2} : al = 2np$.

Donc la proportion $gs : as + ap :: al : ap$ devient

$$2p : \sqrt{9p^2 - 3g^2} + ap :: 2np : ap.$$

D'où l'on tire, en désignant par a la valeur de l'axe *as*,

$$ap = \frac{n}{1 - n}\, a = us.$$

2°. Pour les diagonales du rhomboïde secondaire, que nous désignerons par γ', π'; la ligne *oz* étant une perpendiculaire sur l'axe *pu*, les triangles semblables *ozu*, *dru*, donneront $dr : ur :: oz : uz$,

ou $\sqrt{\frac{4}{3}g^2} : \left(\frac{1}{3} + \frac{n}{1-n}\right)\sqrt{9p^2 - 3g^2} :: \sqrt{\frac{4}{3}\gamma'^2}$

$$: \tfrac{2}{3}\left(1 + \frac{2n}{1-n}\right)\sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

Mais

Donc

$$9\pi'^2 = 3\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 g^2$$

D'où l'on tire

$$\pi' = (n+1)\sqrt{\left(\frac{1}{1-n}\right)^2}$$

65. Il existe entre les ré
décroissemens que nous co
semblable à celle que nous
mens qui agissent sur l'ang
que les mêmes rhomboïdes q
sement direct sur l'angle infé
produits en vertu d'un décr
même angle. Pour trouver un
quelle étant donnée

facile de voir que la similitude de forme entre les deux rhomboïdes dépend de la condition que *ur* (fig. 43) soit égale à *pr* (fig. 42). Donc

$$\frac{2n'+1}{3-3n'}\sqrt{9p^2-3g^2}=\frac{2n+1}{3n-3}\sqrt{9p^2-3g^2},$$

ou simplement

$$\frac{2n'+1}{1-n'}=\frac{2n+1}{n-1},$$

d'où l'on tire

$$n=\frac{n'+2}{4n'-1}, \quad \text{et} \quad n'=\frac{n+2}{4n-1}.$$

66. Ici revient la même propriété qui a lieu pour les décroissemens sur l'angle supérieur, c'est-à-dire que les deux formules indiquent les mêmes fonctions réciproques entre n et n', en sorte que l'on peut aussi choisir l'une d'elles à volonté, par exemple la première, ou $n=\frac{n'+2}{4n'-1}$, pour en déduire la solution des deux espèces de problèmes. De plus, si l'on compare cette formule avec celle qui se rapporte aux décroissemens sur l'angle supérieur, et qui est

$$n=\frac{2-n'}{4n'+1},$$

on voit qu'elle n'en diffère qu'en ce que les quantités renfermées dans le second membre sont affectées de signes contraires. On peut donc réunir les deux valeurs de n en une seule, qui aura la forme suivante

$$n=\frac{2\mp n'}{4n'\pm 1},$$

les signes supérieurs devant être employés dans le cas des décroissemens sur l'angle A, et les inférieurs dans celui des décroissemens sur l'angle *e*. Ayant déjà quelques-uns des résultats relatifs aux signes supérieurs, suivons la formule dans ses applications à de nouveaux problèmes.

67. Si en continuant d'employer les mêmes signes, on fait $n' = 2$, n devient zéro, et l'on a un résultat que j'ai déjà indiqué plus haut (p. 320); c'est-à-dire que *adsg* (fig. 44) étant toujours la coupe du noyau, et ao' étant la diagonale oblique du rhomboïde produit par le décroissement direct, celle du rhomboïde qui résulte du décroissement inverse coïncide avec l'arête *ag*.

Si l'on fait n' plus grand que 2, la valeur de n devient négative. La diagonale oblique du rhomboïde produit par le décroissement direct ayant alors une position telle que ao'', située en dessous de ao', celle du rhomboïde donné par le décroissement inverse, tend à s'abaisser en dessous de *ag*, en prenant une position telle que ax', elle sera située comme la diagonale oblique d'un rhomboïde qui naîtrait d'un décroissement inverse sur l'angle e' (fig. 45), et il est évident que ce rhomboïde est semblable à celui dont ao'' (fig. 44) représente la diagonale oblique. Alors la marche du décroissement au lieu d'être descendante, en allant de a vers x, comme dans les cas précédens, devient ascendante en allant de g vers p, et c'est ce qu'indique le signe négatif. La

valeur de n, prise avec le signe positif, est la même que celle qu'on aurait obtenue, en cherchant immédiatement la loi du décroissement inverse sur l'angle e' (fig. 45), d'où résulte un rhomboïde semblable à celui qui est produit par le décroissement direct sur A, et dont ao'' (fig. 44) est la diagonale oblique.

Il est facile de vérifier cette analogie, en considérant que dans le cas dont nous venons de parler, on a $gn : np$ (fig. 43) ou $dr : ur :: mu$ (fig. 5, pl. 15) $: au$. Or, lorsque dans la formule trouvée ci-dessus, savoir,

$$n = \frac{2 - n'}{4n' + 1},$$

on fait n' plus grand que 2, cette quantité se rapporte à un décroissement inverse. Désignant donc par n' la loi du décroissement qui détermine le rapport mu à au (fig. 5), et par n celle du décroissement d'où dépend le rapport dr à ur (fig. 43), nous aurons

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} : \frac{2n+1}{3-3n}\sqrt{9p^2-3g^2} :: (n'+1)\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} : \frac{2n'-1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2};$$

ou

$$1 : \frac{2n+1}{1-n} :: n'+1 : 2n'-1.$$

D'où l'on tire

$$n = \frac{n'-2}{4n'+1}.$$

Or, si dans cette formule on substitue à n' telle valeur numérique que l'on voudra, le résultat sera

le même que celui auquel on parviendrait si dans la première formule $n = \frac{2 - n'}{4n' + 1}$ on égalait n' à la même valeur, et que l'on prît le résultat avec un signe contraire (1).

68. Ainsi la formule $n = \frac{2 - n'}{4n' + 1}$ indique par elle-même les cas où le décroissement inverse qui répond à celui dont la loi est n' agit, non plus sur le même angle supérieur A (fig. 45), mais sur l'angle inférieur e' de la face opposée à P, et de plus elle donne la loi du décroissement dont il s'agit.

Si l'on suppose n' infini, les faces produites étant censées se confondre avec celles du noyau, le rhomboïde correspondant, qui naît du décroissement inverse, sera semblable à ce même noyau; alors les nombres 2 et 1 s'évanouissent devant les quantités infinies n' et $4n'$, et l'on a $n = -\frac{1}{4}$, c'est-à-dire que le décroissement qui donne ce résultat remarquable a lieu par deux rangées en hauteur sur l'angle e' (fig. 45).

---

(1) Supposons par exemple que la substitution d'une valeur numérique à n' dans la formule $n = \frac{2 - n'}{4n' + 1}$ conduise à un résultat négatif, ce qui est le cas que nous considérons ici. Soit $\frac{2 - n'}{4n' + 1} = -a$. Si l'on rend a positif, le premier membre devient $\frac{n' - 2}{4n' + 1}$, qui dans l'autre formule donne la valeur de n.

Nous reviendrons bientôt sur ce même résultat, pour en faire des applications à des variétés prises dans diverses espèces.

69. Considérons maintenant la formule relativement aux signes inférieurs, et servons-nous des résultats qui se déduisent de leur usage, pour comparer et lier entre elles les propriétés renfermées dans les formules particulières qui se rapportent les unes aux décroissemens directs sur l'angle *e* (fig. 45), les autres à ceux qui agissent par renversement sur les mêmes angles.

Si l'on fait $n=1$, dans l'expression $\frac{1}{n-1}a$ de ap (fig. 42), on a $ap=\frac{1}{0}a$; c'est-à-dire qu'alors l'axe étant infini, les faces produites lui sont parallèles et disposées comme les pans d'un prisme hexaèdre régulier. D'une autre part, si l'on égale aussi n à l'unité dans l'expression $\frac{na}{1-n}$ de us (fig. 43), on trouve pareillement $us=\frac{1}{0}a$. Les deux décroissemens se trouvent alors parvenus à une limite passé laquelle les lignes mp (fig. 42) et du (fig. 43) se rejettent l'une et l'autre en sens contraire, de manière que le décroissement direct se change en un décroissement inverse, et *vice versâ*.

La formule $n=\frac{2\mp n'}{4n'\pm 1}$ prise avec les signes inférieurs indique l'identité des deux résultats précédens; car si l'on fait $n'=1$, on trouve $n=\frac{3}{3}=1$. Je

entôt divers exemples analogues à ce paral-

lélisme entre les faces produites et l'axe du
et dans lesquels ces faces se trouvent lim
d'autres, qui sont dues à des lois différentes
croissement.

70. Si dans le rapport trouvé plus haut e
expressions des diagonales γ et π des rhom
secondaires produits par des décroissemens
sur e (fig. 45), on fait $g = \sqrt{3}$, $p = \sqrt{2}$,
auquel cas le décroissement a lieu par trois r
en largeur, on aura $\gamma = \frac{5}{4}\sqrt{3}$, et $\pi = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{5}{8}$
Donc $\gamma : \pi :: \sqrt{3} : \sqrt{17}$.

Il existe une variété de chaux carbonatée re
sentée (fig. 46), qui réalise ce résultat. J'y ren
drai plus bas, pour en démontrer une propri
remarquable, d'où j'ai tiré le nom de *contrastant*
qu'elle porte dans la méthode.

71. Si dans la formule $n = \frac{2 \mp n'}{4n' \pm 1}$, on contin
d'employer les signes inférieurs, et que l'on substitue
à la place de n' la fraction $\frac{1}{3}$ relative à la variété dont
je viens de parler, on trouve $n = \frac{7}{10}$, qui indique un
rhomboïde semblable à cette variété, et produit en
vertu d'un décroissement sur l'angle e (fig. 45), par
sept rangées en largeur et par cinq rangées en hau-
teur. Les faces de ce rhomboïde existent parmi celles
d'une variété de chaux carbonatée que je nomme
imitative, et que je ferai connaître dans la suite. Les
deux solutions du problème se trouvent ici réalisées
par la cristallisation.

1. Si n' devient infini, alors les quantités 2 et 1 ...nt nulles, on a $n = \frac{1}{4}$, d'où l'on conclura que la ...ne secondaire qui naît du décroissement par deux ...gées en hauteur est semblable au noyau. Ce ré...tat est le même que celui auquel nous sommes ...rvenus plus haut, en faisant n' infini dans la for...ule employée avec les signes supérieurs, avec la ...fférence que dans ce dernier résultat, la valeur de n ...t affectée du signe négatif, parce que le décroisse...ent auquel elle se rapporte prend une marche op...osée à celle qu'il suivait dans les cas où la valeur ...ont il s'agit était positive.

On peut démontrer immédiatement l'identité de forme qui a lieu dans le cas que nous venons de considérer, entre le rhomboïde secondaire et le noyau, d'après l'observation que dans le cas présent,

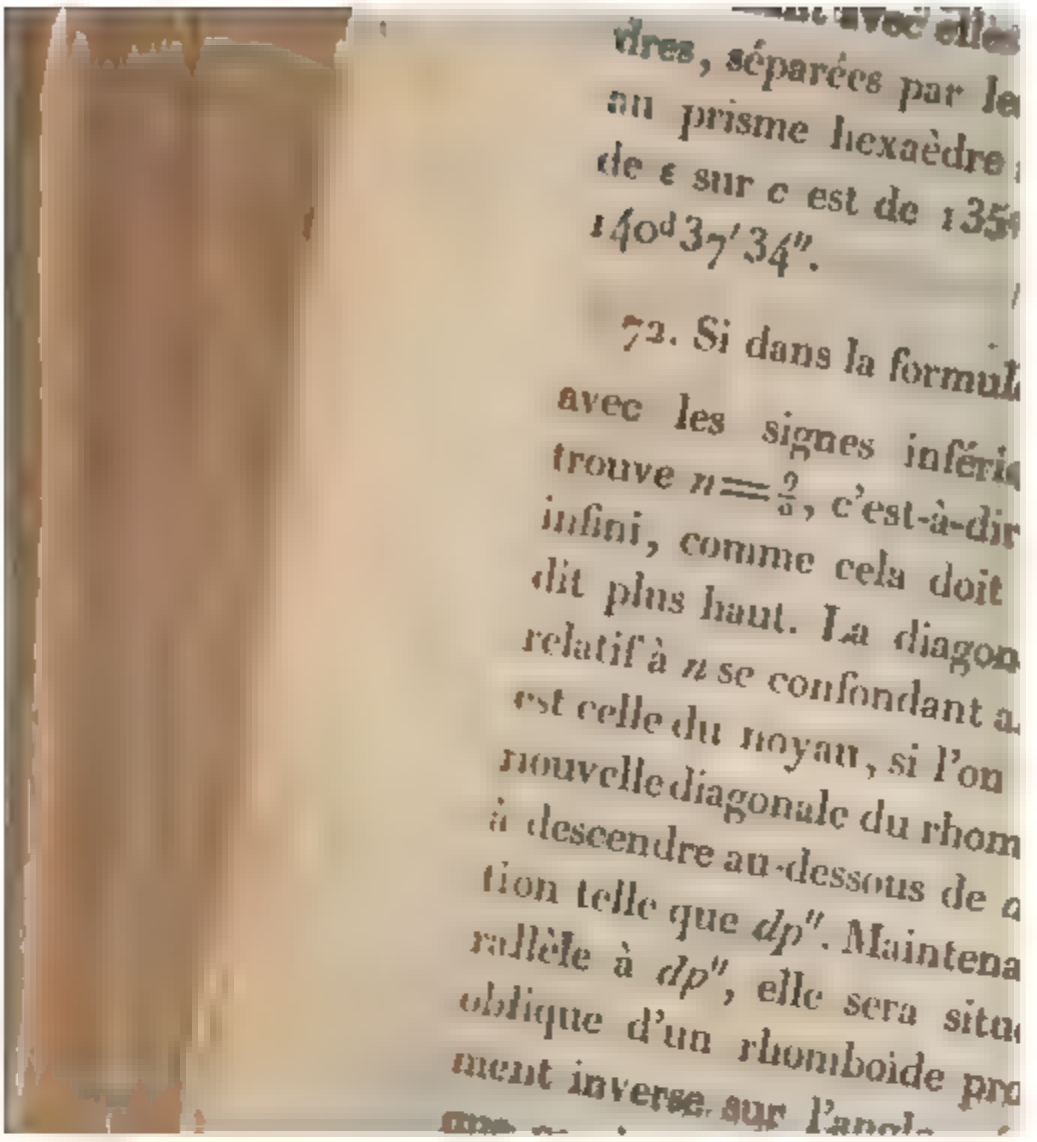
$$dr : ur \text{ (fig. 43)} :: dr : ar.$$

Donc $ur = ar$, et $us = rs = \frac{1}{3}a$.

Donc $\frac{n}{1-n}a = \frac{1}{3}a$, ou $\frac{n}{1-n} = \frac{1}{3}$,

ce qui donne $n = \frac{1}{4}$, comme ci-dessus.

La chaux carbonatée, le quarz, la tourmaline et le fer oligiste, offrent des exemples de cette reproduction du noyau, comme forme secondaire. Je me bornerai ici à en citer un, qui est tiré de la première de ces substances; c'est celui qui existe dans la variété *trihexaèdre*, représentée fig. 47, et dont le signe



dres, séparées par le
au prisme hexaèdre
de ε sur c est de 135
140°37′34″.

72. Si dans la formul
avec les signes inféri
trouve $n = \frac{2}{3}$, c'est-à-dir
infini, comme cela doit
dit plus haut. La diagon
relatif à n se confondant a
est celle du noyau, si l'on
nouvelle diagonale du rhom
à descendre au-dessous de a
tion telle que dp''. Maintena
rallèle à dp'', elle sera situ
oblique d'un rhomboide pr
ment inverse sur l'angle

tive, parce que la marche du décroissement au lieu d'être ascendante, en allant de d vers p, comme dans les cas précédens, devient descendante, en allant de a vers o''. Cette valeur de n, prise avec le signe positif, indique de même la loi qui produit un rhomboïde semblable à celui que donne n', et l'on pourrait la trouver immédiatement par un calcul analogue à celui que nous avons employé (p. 375) pour le cas relatif aux signes supérieurs.

73. Lorsque n' devient zéro, on a $n = -2$. Alors le rhomboïde auquel n' se rapporte étant semblable à celui qui naît d'un décroissement par une rangée sur les bords supérieurs du noyau, celui qui est indiqué par n résulte d'un décroissement par quatre rangées sur les angles supérieurs. Nous avons obtenu le même résultat, en sens inverse, à l'aide de la formule employée avec les signes supérieurs, en faisant $n' = 2$, ce qui a donné $n = 0$.

Lorsque n' est plus petit que $\frac{1}{4}$, les faces du rhomboïde qui naît du décroissement inverse sont plus inclinées à l'axe que les faces primitives; d'où il suit que le décroissement direct, qui produit l'analogue du rhomboïde dont il s'agit, se trouve transporté sur l'angle supérieur. Continuons de désigner par n l'exposant de ce dernier, et cherchons deux formules qui donnent n en fonction de n', et réciproquement. Pour les obtenir, il faut égaler le rapport entre mu et au (fig. 5, pl. 15) à celui qui a lieu entre dr et ur (fig. 43). Nous aurons donc $mu : au :: dr : ur$,

d'où l'on tire

$$n' = \frac{n-2}{4n+1}$$

74. Reprenons mai
formules qui nous on
priétés des rhomboïde
mens soit directs soit
rieurs du noyau.

Lorsque n égale $\frac{1}{2}$, da
on trouve, en appliquan

$$\gamma' : \pi' :: {}^3g$$

Or, ce rapport est le mê
gonales du rhomboïde
ment E''E, comme cela d
trois décroissemens qui ag
angle solide latéral

férieurs. Le rhomboïde qui correspond à ce double emploi, dans la chaux carbonatée, est celui que j'ai appelé *inverse*.

75. Nous avons déjà dans la variété trihexaèdre (fig. 47) un exemple des combinaisons de lois, à l'aide desquelles les faces parallèles à l'axe, qui par elles-mêmes sont infinies, s'associent d'autres faces qui en limitent l'étendue. Une des formes les plus communes, en ce genre, est celle du prisme hexaèdre régulier, nommé *chaux carbonatée prismatique* (fig. 37, pl. 3), dont le signe est $\overset{\circ}{e}\underset{c\,\circ}{\overset{1}{A}}$. Dans une autre variété que l'on rencontre de même assez fréquemment, et qui est représentée (fig. 29, pl. 2), les faces additionnelles appartiennent au rhomboïde équiaxe. Cette variété, que j'appelle *chaux carbonatée dodécaèdre*, a pour signe $\overset{\circ}{e}\underset{c\,g}{\overset{1}{B}}$; incidence de g sur c', 116d 33′ 55″.

Quelquefois les pans de la variété prismatique se trouvent doublés, par l'intervention de la loi $\dot{D}$, qui, combinée avec la loi $\overset{1}{A}$, est de même susceptible de produire le prisme hexaèdre régulier. On a, dans ce cas, la chaux carbonatée *péridodécaèdre* (fig. 48), dont le signe est $\overset{\circ}{e}\dot{D}\underset{c\,u\,\circ}{\overset{1}{A}}$, et dans laquelle chaque pan fait un angle de 150d avec les deux qui lui sont adjacens.

76. La réunion des faces du prisme hexaèdre ré-

appartiennent au rhom
pèzes. Cela posé, la pr
en ce que les deux angl
aigus a, a, sont situés d
sur le rhomboïde ils sont
les angles du rhomboïde
les nouveaux plans qui
m'a suggéré le nom de *pe*
cette variété. Le signe es

sur c, $153^d\,26'6''$.

Il est facile de démontre
rise cette même variété. S
boïde inverse. Je mène kh
côtés bg, bc, cd, puis hn et
ait $bn = \frac{1}{4}\,ab$. Je mène ensui
ait aussi $td = \frac{1}{4}\,ad$, puis la
lèle à la diagonale bd, et enfi

le plan *knh* est parallèle au plan *c* (fig. 49). Donc, puisque *lt* (fig. 50) est inclinée en sens contraire de la même quantité que *hn*, il en résulte que le rhombe *abcd* est coupé de la même manière par les lignes *hn*, *lt*, que le rhombe dont *f* (fig. 49) est censé faire partie, l'est par les lignes $a'a$, $a'a$. D'une autre part, les lignes *nt*, *hl* (fig. 50) étant parallèles aux lignes aa, $a'a'$ (fig. 49), il en résulte que le trapèze *ntlh* (fig. 50) est semblable au trapèze *f* (fig. 49).

Soient g', p' les demi-diagonales du rhombe *abcd* (fig. 50). Nous aurons $hl = \frac{1}{2}bd = g$, et *hm* ou

$$pu = \tfrac{1}{8}bx = \tfrac{1}{4}g'.$$

Mais à cause de $an = \frac{3}{4}ab$, nous avons aussi

$$un = \tfrac{3}{4}bx = \tfrac{3}{4}g'.$$

Donc *pn* ou $un - pu = \frac{1}{4}g'$. Maintenant,

$$hp = hz + pz = mx + ux = \tfrac{1}{2}p' + \tfrac{1}{4}p' = \tfrac{3}{4}p'.$$

Donc

$$hp : pn :: \tfrac{3}{4}p' : \tfrac{1}{4}g' :: 3p' : g' :: 3\sqrt{5} : \sqrt{3} :: \sqrt{15} : 1.$$

Donc $hn : pn :: 4 : 1$, rapport qui est le même que celui qui a été trouvé plus haut (p. 361), entre le sinus total et le cosinus du petit angle plan du rhomboïde inverse. On aura donc a' (fig. 49) $= 104^d 28' 40''$, et $a = 75^d 31' 20''$.

77. J'ajouterai ici la description de deux rhom-

(fig. 51), a pour signe
les expressions des demi

Donc $\gamma' = \frac{7}{5}\sqrt{3}$ e

$\gamma' : \pi' ::$

ce qui donne pour l'incid
pour celle de s sur s', 11
plans, 37d 31′ 4″ et 142d 2
Cette variété unie à la
du rhomboïde contrastant,
posée, représentée (fig. 52)

carbonatée trirhomboïdale.

dence de P sur m, 149d 2′ 11
de m sur s', ou de m' sur s,
ou de m' sur s', 121d 32′ 54
Le second rhomb

loi qui donne ce rhomboïde, j'exposerai un résultat dont il m'a fourni le sujet, et qui prouve la possibilité qu'un rhomboïde dont la différence avec la forme cubique serait très-légère, soit produit par une loi admissible de décroissement, comme forme secondaire de la chaux carbonatée. Je suppose que la loi dont il s'agit ait lieu sur l'angle inférieur *e*. Pour qu'elle donne le résultat indiqué, il faut que l'on ait $dr : ur$ (fig. 43) à très peu près comme $1 : \sqrt{2}$, ce rapport étant celui qui existe dans le cube, entre la demi-perpendiculaire sur l'axe et la partie de cet axe qu'elle intercepte, ou entre $\sqrt{\frac{1}{3}g^2}$ et $\frac{1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2}$. Or, $1:\sqrt{2}$ presque comme $1:1{,}4$ ou comme $5:7$. Adoptant donc ce dernier rapport, nous aurons

$$dr : ur :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \left(\tfrac{1}{3}+\frac{n}{1-n}\right)\sqrt{9p^2-3g^2} :: 5 : 7;$$

ou,

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n+1}{3-3n}\sqrt{9p^2-3g^2} :: 5 : 7.$$

Et en faisant $g = \sqrt{3}$ et $p = \sqrt{2}$,

$$2 : \frac{2n+2}{3-3n}.3 :: 5 : 7;$$

ou $$2 : \frac{2n+1}{1-n} :: 5 : 7.$$

D'où l'on tire, $n = \frac{3}{6}$.

Cherchons, d'après cette valeur, le rapport entre les demi-diagonales y' et x' du rhomboïde secon-

daire, nous aurons

$$\gamma' : \pi' :: \frac{2n+2}{2n+1} g : (n+1)\sqrt{\left(\frac{1}{1-n}\right)^2 (p^2 - \tfrac{1}{3}g^2) + \left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 \tfrac{1}{3}g^2}$$

$$:: \sqrt{75} : \sqrt{74},$$

ce qui donne $90^d\,23'$, au lieu de 90^d, pour l'incidence de deux faces voisines autour d'un même sommet.

On pourrait, en conservant la même loi, obtenir une forme secondaire exactement cubique, au moyen d'une légère altération dans les angles de la forme primitive. Dans ce cas, on a

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n+1}{3-3n}\sqrt{9p^2 - 3g^2} :: 1 : \sqrt{2}.$$

Et mettant à la place de n sa valeur $\frac{5}{8}$,

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \tfrac{14}{15}\sqrt{9p^2 - 3g^2} :: 1 : \sqrt{2};$$

ou,
$$\tfrac{1}{3}g^2 : \tfrac{49}{225}(9p^2 - 3g^2) :: 1 : 2.$$

D'où l'on tire, $99g^2 = 147p^2$, et $g : p :: \sqrt{147} : \sqrt{99}$.

Ce rapport donne $104^d\,2'$ pour la plus grande incidence des faces du rhomboïde primitif. Or, cette incidence mesurée avec soin est sensiblement plus grande ; et ainsi, en mettant dans l'observation des angles la précision convenable, on reconnaîtrait encore que l'aspect de la forme n'offrirait qu'une fausse ressemblance. Au reste, il ne serait pas impossible que des variétés relatives à des espèces très-distinguées d'ailleurs l'une de l'autre, ne se rapprochassent tellement par leurs formes extérieures, que la diffé-

rence échappât aux mesures mécaniques. Mais ces analogies qui par elles-mêmes sembleraient répandre du vague dans la considération des formes cristallines, serviraient à mieux prouver les avantages et la fécondité de la théorie, lorsqu'elle nous découvrirait des structures et des lois particulières cachées sous une identité apparente, et propres à faire ressortir nettement ce corps que l'œil abandonné à lui-même serait tenté de confondre.

78. M. Smithson, célèbre minéralogiste anglais, s'étant procuré des cristaux de la variété qui nous occupe ici, reconnut bientôt que c'étaient des rhomboïdes aigus dans lesquels la plus petite inclinaison des faces n'était que d'environ 88^{d}. De plus, il remarqua que le rhomboïde se divisait par des coupes qui, en partant des sommets, interceptaient les arêtes situées comme *op* (fig. 43), en faisant des angles égaux avec les faces adjacentes à ces arêtes, ce que l'on concevra aisément, par l'inspection de la fig. 53, qui représente le rhomboïde et son noyau inscrit. Cette observation lui indiqua que le décroissement qui donnait ce rhomboïde agissait dans le sens de la hauteur sur l'angle inférieur du noyau, et le calcul lui fit connaître que l'on avait dans ce cas $n = \frac{2}{5}$, c'est-à-dire que le décroissement se faisait par quatre rangées en largeur et par cinq en hauteur.

Si l'on cherche d'après cette donnée le rapport entre les demi-diagonales du rhomboïde secondaire, on trouve $\gamma' : \pi' :: \sqrt{12} : \sqrt{13}$, ce qui donne

considérer la chose sous un point de vue général, et démontrer qu'un rhomboïde quelconque dont on suppose les demi-diagonales représentées par g et p, est susceptible de produire, à l'aide d'une loi de décroissement, qui dépend du rapport entre g et p, un autre rhomboïde dont telle est la forme, que ses angles plans sont égaux aux angles saillans du rhomboïde générateur, que réciproquement ses angles saillans sont égaux aux angles saillans du générateur, et que les coupes principales des deux rhomboïdes ont les mêmes angles.

Ces deux conditions, dont l'une consiste dans l'inversion des angles plans et saillans des deux rhomboïdes, et l'autre dans l'égalité des angles des coupes principales, sont tellement liées entre elles, que l'une étant supposée, l'autre en devient une suite nécessaire. C'est ce que je vais prouver en prenant pour donnée la seconde condition.

Soient *adsg*, *aosl* (fig. 54), les coupes des deux rhomboïdes qui doivent être telles que l'on ait..... $ads = oal$, et par conséquent $dag = aos$. Je donne ici, pour plus de simplicité, un axe commun aux deux rhomboïdes, parce que si l'on suppose ces axes inégaux, la démonstration reste la même.

J'observerai ici que l'un des deux rhomboïdes est nécessairement obtus et l'autre aigu. C'est une suite de ce que le grand angle *oal* de l'une des coupes est situé au sommet du rhomboïde auquel celle-ci appartient, tandis que dans l'autre coupe le petit angle *dag*,

qui est égal au supplément du premier, correspond de même au sommet du rhomboïde auquel cette coupe se rapporte.

Soient g, p les demi-diagonales du rhomboïde aigu dont la coupe est $adsg$, et g', p', celles du rhomboïde obtus dont la coupe est $aosl$; ds sera l'arête du premier, os celle du second, et ad, ao, seront les diagonales obliques. Or, les triangles asd, lxa, sont semblables par une suite de ce que les angles ads, lax sont égaux, et de ce que les perpendiculaires dr, an, menées des sommets sur les bases, divisent celles-ci en deux parties dont l'une est double de l'autre (1).

---

(1) Supposons deux triangles bic (fig. 55), et xzy (fig. 56), tracés d'après les conditions que les angles bci et xyz soient égaux, et que les perpendiculaires ct (fig. 55), yq (fig. 56), abaissées de ces angles sur les bases, divisent ces dernières en deux parties $tı$, bt (fig. 55), et qz, xq (fig. 56), qui soient entre elles dans un même rapport exprimé par $\frac{m}{n}$. Je dis que les deux triangles sont semblables. Pour le prouver, concevons que le triangle xzy (fig. 56) se superpose sur le triangle bic (fig. 55), de manière que yx se trouve sur la direction de cb, et yz sur celle de ci. Soit k le point de la ligne cb auquel se termine le côté yx. Si l'on mène kf (fig. 55) parallèle à la base bt, il est évident que les triangles bic, kfc, seront semblables, et que de plus la base kf se trouvera divisée par la perpendiculaire ct en deux parties ef, ke, qui seront entre elles dans le même rapport que $tı$ et bt, ou que qz et qx (fig. 56). Or, on ne peut mener du point k (fig. 55)

Donc, $ad : du :: al : ax$,

ou $2p : \sqrt{g^2+p^2} :: \sqrt{g'^2+p'^2} : p'$,

ou $4p^2 : g^2+p^2 :: g'^2+p'^2 : p'^2$.

Si du second terme de chaque rapport on retranche la moitié du premier, la proportion devient

$$4p^2 : g^2-p^2 :: g'^2+p'^2 : \frac{p'^2-g'^2}{2},$$

ou $2p^2 : g^2-p^2 :: g'^2+p'^2 : p'^2-g'^2$.

Or, le premier rapport est celui du sinus total au cosinus du petit angle saillant du rhomboïde aigu,

---

dans l'ouverture de l'angle *bci* aucune autre ligne qui ait les mêmes propriétés. Car imaginons que la ligne substituée à *kf*, se relève au-dessus de celle-ci, en prenant la position *kf'*. La perpendiculaire *ce'* menée du sommet sur *kf'* sera évidemment plus petite que *ce*; donc puisque l'on doit avoir

$$(ke')^2 + (ce')^2 = (ke)^2 + (ce)^2 = (ck)^2,$$

ke' sera nécessairement plus grande que *ke*; mais la ligne entière *kf'* est plus courte que *kf*, donc le rapport $e'f' : ke'$ est plus petit que $\frac{m}{n}$. On prouvera par un raisonnement analogue que si la ligne kf'' substituée à *kf*, s'abaisse en dessous de celle-ci, le rapport entre les parties $e''f''$, ke'' de kf'' divisée par la perpendiculaire ce'' est plus grand que $\frac{m}{n}$. Donc, dans la superposition du petit triangle sur le plus grand, la ligne *xz* (fig. 56) coïncide avec la ligne *kf* (fig. 55), d'où il suit que les deux triangles sont semblables.

et le second rapport est celui du sinus total au cosinus du petit angle plan du rhomboïde obtus. Donc les angles plans de ce dernier rhomboïde sont égaux aux angles saillans de l'autre.

Si dans la proportion

$$2p^2 : g^2 - p^2 :: g'^2 + p'^2 : p'^2 - g'^2,$$

on ajoute le second terme de chaque rapport au premier, elle devient

$$g^2 + p^2 : g^2 - p^2 :: 2p'^2 : p'^2 - g'^2.$$

Or, dans celle-ci le premier rapport est celui du sinus total au cosinus du petit angle plan du rhomboïde aigu, et le second rapport est celui du sinus total au cosinus du petit angle saillant du rhomboïde obtus; donc les angles saillans de ce dernier rhomboïde sont égaux aux angles plans de l'autre

81. Connaissant le rapport entre les demi-diagonales de l'un des deux rhomboïdes, il est facile de trouver celui qui existe entre les demi-diagonales de l'autre. Supposons que l'on connaisse g' et p', et que l'on cherche g et p. Je reprends la proportion

$$2p^2 : g^2 - p^2 :: g'^2 + p'^2 : p'^2 - g'^2,$$

dont je dispose ainsi les termes,

$$g^2 - p^2 : 2p^2 :: p'^2 - g'^2 : g'^2 + p'^2.$$

Ajoutant au premier terme de chaque rapport la

moitié du second, on a

$$g^2 - p^2 + p^2 : 2p^2 :: p'^2 - g'^2 + \frac{g'^2 + p'^2}{2} : g'^2 + p'^2,$$

ou

$$g^2 : 2p^2 :: \frac{3p'^2 - g'^2}{2} : g'^2 + p'^2;$$

d'où l'on tire,

$$g : p :: \sqrt{3p'^2 - g'^2} : \sqrt{g'^2 + p'^2}.$$

Si l'on suppose au contraire que les demi-diagonales connues soient g et p, on trouve

$$g' : p' :: \sqrt{3p^2 - g^2} : \sqrt{g^2 + p^2},$$

proportion dans laquelle les termes du second rapport sont des fonctions de g et de p semblables à celles de g' et de p' que présente le second rapport de la proportion précédente, en sorte que l'une des deux, prise à volonté, donne le résultat proposé, quel que soit celui des deux rhomboïdes dont on suppose les diagonales connues. Cette identité dans les fonctions de g, p, et g', p', provient de ce que par une suite de l'inversion qui existe dans les angles des deux rhomboïdes, la coupe transversale de chacun d'eux est semblable aux faces de l'autre, ou, ce qui revient au même, le rapport entre les demi-diagonales de la coupe transversale de l'un est égal au rapport entre les demi-diagonales des faces de l'autre. Or, on trouve, en employant les formules du n° 6, que le rapport entre les demi diagonales de la coupe

transversale d'un rhomboïde est en général celui de $\sqrt{3p^2-p^2} : \sqrt{g^2+p^2}$, la quantité $\sqrt{3p^2-g^2}$ étant l'expression de la plus petite des diagonales, si le rhomboïde est obtus, et de la plus grande, s'il est aigu. Maintenant, lorsque dans la comparaison de deux rhomboïdes dont chacun a ses angles plans et solides réciproques à ceux de l'autre, celui dont on cherche les diagonales est aigu, auquel cas le second dont les diagonales sont censées connues est obtus, si l'on désigne par g' et p' les demi-diagonales que l'on cherche, et par g et p celles que l'on connaît, g' étant alors plus petit que p', et $\sqrt{3p^2-g^2}$ devant être aussi plus petit que $\sqrt{g^2+p^2}$, on aura

$$g' : p' :: \sqrt{3p^2-g^2} : \sqrt{g^2+p^2};$$

et lorsqu'au contraire les demi-diagonales censées connues sont celles du rhomboïde obtus, auquel cas celui dont on cherche les diagonales est aigu, si l'on continue de représenter par g' et p', les demi-diagonales inconnues, et par g et p celles que l'on connaît, g' étant plus grand que p', et $\sqrt{3p^2-g^2}$ devant être de même plus grand que $\sqrt{g^2+p^2}$, on aura encore, $g' : p' :: \sqrt{3p^2-g^2} : \sqrt{g^2+p^2}$, d'où l'on voit que la proportion satisfait aux deux cas indiqués.

82. Concevons maintenant que le rhomboïde obtus fasse à l'égard de l'autre la fonction de noyau, et cherchons la loi de décroissement en vertu de laquelle

il est susceptible de produire l'autre, ce décroissement étant censé agir sur l'angle inférieur du noyau dont il s'agit. Soit *aosl* (fig. 54) la coupe de ce noyau, et soit *pyuh* une coupe semblable à *adsg*, prise par des parallèles aux côtés de celle-ci, et que nous supposerons être celle du rhomboïde secondaire. Les triangles *orp*, *anl*, sont semblables, *orp* étant lui-même semblable à *dra*.

Donc

$$or : pr :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \left(\tfrac{2}{3} + \frac{1}{n-1}\right)a :: an : nl :: \tfrac{1}{3}a : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

ou
$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n+1}{3n-3}.a :: \tfrac{1}{3}a : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Donc

$$\tfrac{4}{3}g^2 = \frac{2n+1}{9n-9}.a^2 = \frac{2n+1}{9n-9}(9p^2 - 3g^2),$$

et
$$4g^2 = \frac{2n+1}{n-1}(3p^2 - g^2);$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{g^2 + p^2}{2g^2 - 2p^2}.$$

Concevons au contraire que ce soit le rhomboïde aigu qui fasse à l'égard de l'autre la fonction de noyau, et supposant que le décroissement en vertu duquel il produit celui-ci agisse sur l'angle A, cherchons la loi de ce décroissement. Nous pouvons alors considérer *adsg* comme la coupe du noyau, et *aosl* comme celle du rhomboïde secondaire.

Les triangles semblables axn, aor, donnent

$$xn : an :: or : ar :: (n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n-1}{3}.a.$$ (voyez 21).

De plus, les triangles semblables axn, sdr, donnent

$$xn : an :: rs : dr :: \tfrac{1}{3}a : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

donc

$$(n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n-1}{3}.a :: \tfrac{1}{3}a : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Donc

$$(n+1)\tfrac{4}{3}g^2 = \frac{2n-1}{9}(9p^2-3g^2),$$

ou

$$(n+1)4g^2 = (2n-1)(3p^2-g^2),$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{g^2+p^2}{2p^2-2g^2}.$$

Il est remarquable que les deux rapports qui expriment les valeurs de n soient la moitié de ceux qui expriment les cosinus des petits angles plans, dans deux rhomboïdes dont l'un est obtus et l'autre aigu. Nous avons déjà vu le rapport qui représente le cosinus du petit angle saillant d'un rhomboïde obtus, ou plutôt la moitié de ce rapport, se reproduire de même dans le développement des analogies qu'offrent les résultats des décroissemens sur les bords inférieurs.

83. Dans l'hypothèse d'un rhomboïde obtus pris pour noyau, on peut aussi considérer le décroissement qui donne son inverse comme agissant par ren-

versement sur l'angle inférieur ; désignant alors par
l'exposant de la loi qui se rapporte à ce décroiss
ment, il sera facile d'en trouver la valeur d'après
formule $n' = \frac{n+2}{4n-1}$ (65) Si le noyau est un rhom
boïde aigu, on pourra aussi supposer que le décroi
sement qui produit son inverse agisse par renve
sement sur l'angle supérieur, et désignant de mêm
par n' l'exposant de la loi relative à ce décroiss
ment, on en trouvera la valeur à l'aide de la fo
mule $n' = \frac{2-n}{4n+1}$.

84. Avant de passer aux applications, proposons
nous encore de résoudre le problème suivant. Etan
données les demi-diagonales g et p d'un rhomboïd
considéré comme noyau, et la loi de décroissemen
qui produit un rhomboïde secondaire, en agissan
directement sur l'un des angles A, e, trouver la lo
qui produirait le rhomboïde inverse de celui-ci,
l'aide d'un décroissement sur l'autre angle.

Soit ν l'exposant de la loi qui agit sur l'angle A
et ν' celui de la loi qui a lieu sur l'angle e.

Le triangle xag (fig 5, pl. 15), qui appartient
rhomboïde produit par le décroissement sur A,
semblable au triangle pmu (fig. 42, pl. 18), rel
au rhomboïde qui naît du décroissement sur e.
une suite de ce que les coupes des deux rhomb
ont les mêmes angles; donc aussi les triangl
(fig. 5), et mzu (fig. 42), sont semblables.

Donc $xn:an$ (fig. 5) ou $mu:au :: mz$ (fig. 42) $:uz$. Or, d'une part,

$$mu:au :: \frac{2\nu-1}{3}a:(\nu+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} :: (2\nu-1)a:(3\nu+3)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Soit γ la demi-diagonale horizontale du rhomboïde produit par le décroissement sur e. Nous aurons d'une autre part

$$mz : uz :: \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \tfrac{1}{3}\left(1+\frac{2}{\nu'-1}\right)a = \tfrac{1}{3}\left(\frac{\nu'+1}{\nu'-1}\right)a.$$

Donc

$$(2\nu-1)a:(3\nu+3)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} :: \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \tfrac{1}{3}\left(\frac{\nu'+1}{\nu'-1}\right)a;$$

ou

$$(2\nu-1)a:(6\nu+6)g\sqrt{\tfrac{1}{3}} :: 2\gamma\sqrt{\tfrac{1}{3}} : \tfrac{1}{3}\left(\frac{\nu'+1}{\nu'-1}\right)a;$$

mais $$\gamma = \frac{2\nu'+2}{2\nu'+1}g.$$

Donc

$$(2\nu-1)a:(6\nu+6)g\sqrt{\tfrac{1}{3}} :: \frac{4\nu'+4}{2\nu'+1}g\sqrt{\tfrac{1}{3}} : \tfrac{1}{3}\left(\frac{\nu'+1}{\nu'-1}\right)a.$$

Prenant le produit des extrêmes et celui des moyens, puis réduisant,

$$\frac{2\nu-1}{\nu'-1}a^2 = \frac{24\nu+24g^2}{2\nu'+1};$$

$$3g^2) = \frac{24\nu+24g^2}{2\nu'+1};$$

d'où l'on tire

$$\frac{6v'p^2 - 2v'g^2 - 3p^2 + g^2}{v' - 1} = \frac{8v'g^2 + 8g^2}{2v' + 1},$$

ce qui conduit aux deux équations finales

$$v' = \frac{2v(g^2+1}{4v(g^2-p^2)} \frac{-3g^2-p^2}{2(g^2+p^2)},$$

$$v = \frac{2v'(g^2+p^2)}{4v'(p^2-g^2)+2(g^2+p^2)} \frac{-3g^2+p^2}{}.$$

85. Pour appliquer les résultats précédens, supposons d'abord que l'on veuille déterminer les demi-diagonales du rhomboïde qui présente l'inverse du primitif, dans la chaux carbonatée, et la loi de décroissement dont il dépend. Dans ce cas, les demi-diagonales du primitif étant désignées par g' et p', et celles de l'autre rhomboïde par g et p, si l'on fait $g' = \sqrt{3}$, $p' = \sqrt{2}$, et si l'on substitue ces valeurs dans la proportion

$$g : p :: \sqrt{3p'^2 - g'^2} : \sqrt{g'^2 + p'^2},$$

on aura

$$g : p :: \sqrt{3} : \sqrt{5}.$$

Soit n l'exposant du décroissement, en supposant que celui-ci agisse directement sur l'angle e du rhomboïde primitif. Nous avons $n = \frac{g^2+p^2}{2g^2-2p^2}$; donc $n = \frac{5}{2}$; c'est-à-dire que dans l'hypothèse présente le décroissement se fera par cinq rangées sur l'angle e. Si nous supposons au contraire que le décroissement agisse par renversement sur le même angle, alors n' dési-

gnant le nombre de demi-diagonales soustraites en largeur, on aura $n' = \frac{n+2}{4n-1} = \frac{1}{3}$. J'ai fait voir plus haut que cette dernière loi est la véritable, et j'ai déterminé les rapports entre les angles du rhomboïde primitif et ceux de la variété dont il s'agit ici, à laquelle j'ai donné le nom de *chaux carbonatée inverse*.

86. Si l'on prend au contraire pour noyau le rhomboïde qui présente cette variété, et que l'on cherche les demi-diagonales g', p', de celui qui fait à son égard la fonction d'inverse, et la loi qui serait susceptible de produire ce dernier, la proportion

$$g' : p' :: \sqrt{3p^2 - g^2} : \sqrt{g^2 + p^2}$$

devient

$$g' : p' :: \sqrt{12} : \sqrt{8} :: \sqrt{3} : \sqrt{2},$$

ainsi que cela doit être. Soit n l'exposant du décroissement qui est censé ici être direct sur l'angle supérieur ; la formule relative à ce mode de decroissemetit étant $n = \frac{g^2 + p^2}{2p^2 - 2g^2}$, on aura $n = 2$, ce qui indique un décroissement par quatre rangées en largeur ; et si l'on cherche le décroissement inverse qui produirait le même rhomboïde, désignant par n' la loi de ce décroissement, et employant la formule $n' = \frac{2-n}{4n+1}$, on voit que n' devient $\frac{0}{9}$, ou infiniment petit ; c'est-à-dire que dans ce cas le rhomboïde est le même que

la fonction d'inverse,

gonales g et p est celu

sant n du décroisseme

susceptible de le produ

du décroissement inv

au précédent est $\frac{5}{6}$.

88. Si l'on adopte

rhomboïde aigu dont le

entre elles dans le rappo

que dans celui qui prése

$$g' : p' ::$$

que l'exposant n du déc

dépend, et qui est ceusé

périeur, est $\frac{5}{7}$, et que l'ex

inverse qui peut être subs

89. Replaçons mainten

que nous

qui est obtus, en agissant sur l'angle A, cherchons l'exposant ν' du décroissement qui produirait l'autre en agissant de même directement, mais sur l'angle e. Il faudra substituer 2 à ν, $\sqrt{3}$ à g, et $\sqrt{2}$ à p, dans la formule $\nu' = \frac{2\nu(g^2+p^2)+3g^2-p^2}{4\nu(g^2-p^2)+2(g^2+p^2)}$, ce qui donnera $\nu' = \frac{17}{18} = \frac{3}{4}$.

Cette loi est la même que celle dont nous sommes partis ci-dessus, pour trouver le rapport $\sqrt{3}$ à $\sqrt{17}$ entre les demi-diagonales g' et p' du rhomboïde qui nous occupe. C'est ici le lieu d'expliquer le nom de *chaux carbonatée contrastante* que j'ai donné à la variété à laquelle appartient ce rhomboïde. Il est tiré de ce qu'il offre, à l'égard du rhomboïde équiaxe, la même inversion d'angles que le rhomboïde inverse comparé au primitif, inversion qui forme ici une sorte de contraste, en ce que l'un des rhomboïdes est très aigu et l'autre très obtus.

En appliquant au cas présent le calcul que j'ai donné plus haut, à l'occasion du rhomboïde inverse, et en faisant successivement $g = \sqrt{12}$, $p = \sqrt{5}$, pour le rombboïde équiaxe, et $g = \sqrt{3}$, $p = \sqrt{17}$, pour le contrastant, on trouvera que dans le premier, le rapport entre le rayon et le cosinus du petit angle plan est celui de 17 à 7, ce qui donne pour cet angle $65^d\ 41'\ 4''$, et que le rapport entre le rayon et le cosinus de la plus petite incidence des faces est celui de 10 à 7, ce qui donne pour cette incidence

d'eux se confond avec l'arête de celui qui est censé le produire. Or, parmi ces rhomboïdes, les uns, tels que $ad's\gamma$, $ad''s\gamma'$, résulteront d'un décroissement en largeur sur l'angle A du générateur considéré comme leur noyau commun, et les autres, tels que $ad's g'$, $ad''s g''$, résulteront d'un décroissement en hauteur sur le même angle. Cherchons les formules relatives à ces deux cas.

1°. Pour les rhomboïdes produits par un décroissement direct; soient g, p, les demi-diagonales du générateur; γ, π, celles du rhomboïde proposé, et n la loi du décroissement susceptible de produire ce dernier. En général $\gamma = g.2$ (*voyez* page 301).

Donc $$\sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} = 2^r \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

D'une autre part, si nous prenons pour exemple le rhomboïde dont la coupe est $ad's\gamma$, nous aurons

$$d'n : an :: mu \text{ (p 311)} : au :: (n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n-1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2}.$$

Mais on a aussi

$$d'n : an :: \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9\pi^2-3\gamma^2} = \tfrac{2}{3}\sqrt{9p^2-3g^2},$$

à cause de l'égalité des axes. Donc

$$2^r\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9p^2-3g^2} : (n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n-1}{3}\sqrt{9p^2-3g^2},$$

ou

$$2^r : 2 :: n+1 : 2n-1 ;\quad 2^{r-1} : 1 :: n+1 : 2n-1 ;$$

$$2n.2^{r-1} - 2^{r-1} = n+1 ;\quad n.2^r - n = 2^{r-1} + 1.$$

Donc $$n = \frac{2^{r-1}+1}{2^r-1}.$$

2°. Pour les rhomboïdes produits par un décroissement inverse. Soit r' le rang du terme proposé. Nous aurons toujours $\gamma = g \cdot 2^{r'}$, et prenant pour exemple le rhomboïde dont la coupe est $ad'sg''$,

$$d'r : ar :: uy : au \text{ (p. 317)} :: (n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{1-2n}{3}\sqrt{a^2}.$$

Mais de plus,

$$d'r : ar :: \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{9\pi^2 - 3\gamma^2}, \text{ ou } \tfrac{2}{3}\sqrt{a^2}.$$

Donc

$$(n+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{1-2n}{3}\sqrt{a^2} :: 2^{r'}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{a^2};$$

ou $$n+1 : 1-2n :: 2^{r'} : 2 :$$

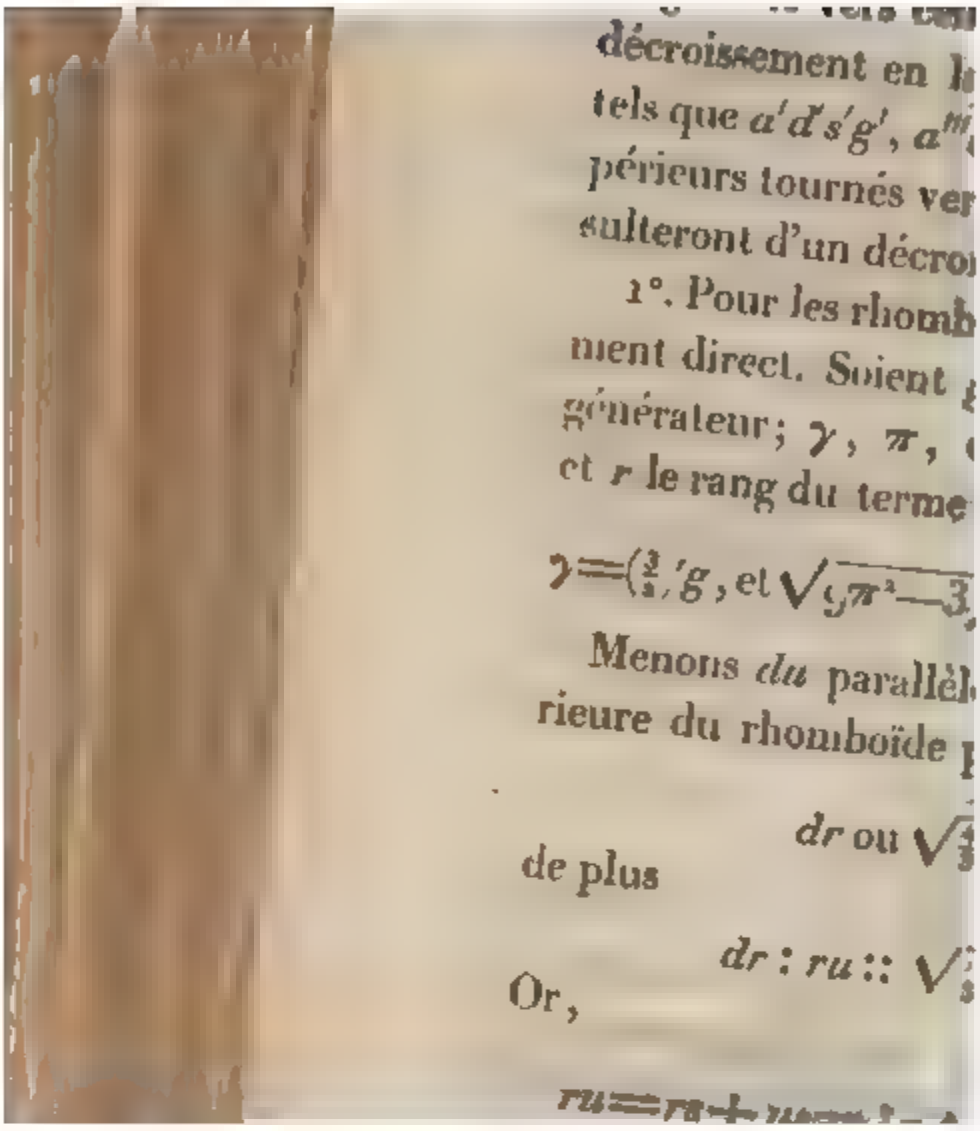
d'où l'on tire

$$2n+2 = 2^{r'} - 2n \cdot 2^{r'},$$
$$n+1 = 2^{r'-1} - n \cdot 2^{r'},$$

et $$n = \frac{2^{r'-1}-1}{2^{r'}+1}.$$

92. Passons tout de suite aux rhomboïdes qui naissent les uns des autres, en vertu de la loi E''E, et bornons-nous de même à ceux qui sont compris dans la série ascendante.

Soit *adsg* (fig. 58) la coupe du rhomboïde générateur. Les coupes des autres rhomboïdes seront suc-



décroissement en h
tels que $a'd's'g'$, a''
périeurs tournés ver
sulteront d'un décro

1°. Pour les rhomb
nient direct. Soient
générateur; γ, π,
et r le rang du terme

$\gamma = (\frac{3}{4}, g$, et $\sqrt{5\pi^2 - 3}$

Menons *du* parallèl
rieure du rhomboïde

dr ou $\sqrt{\frac{3}{4}}$

de plus

$dr : ru :: \sqrt{\frac{3}{4}}$

Or,

$ru = ru +$

ou $$\left(\tfrac{2}{3}\right)^r : \frac{1+2n}{3-3n} :: 1 : \tfrac{2}{3}.3^r,$$

et $$\left(\tfrac{2}{3}\right)^r : \frac{1+2n}{1-n} :: 1 : 2.3^r;$$

d'où l'on tire $$2^r = \frac{1+2n}{2-2n};$$

et enfin, $$n = \frac{2^{r+1}-1}{2(2^r+1)}.$$

2°. Pour les rhomboïdes produits par un décroissement inverse. Soit *dp* une ligne parallèle à la diagonale oblique du rhomboïde proposé. Nous aurons encore

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^r \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2}, \text{ et } \sqrt{9n^2-3\gamma^2} = 3^r.a.$$

De plus

$$dr : pr :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^r \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \left(\tfrac{2}{3}a + \frac{1}{n-1}\right)a = \frac{2n+1}{3n-3}a$$
$$:: \sqrt{\tfrac{4}{3}\gamma^2} : \tfrac{2}{3}.3^r.a;$$

ou $$\left(\tfrac{2}{3}\right)^r : \frac{2n+1}{3n-3} :: 1 : \tfrac{2}{3}.3^r;$$

d'où l'on tire

$$2.3^r\left(\tfrac{2}{3}\right)^r = \frac{2n+1}{n-1}, \quad 2^{r+1} = \frac{2n+1}{n-1}, \quad n.2^{r+1} - 2^{r+1} = 2n+1,$$

$$n.2^{r+1} - 2n = 2^{r+1} + 1, \quad n = \frac{2^{r+1}+1}{2^{r+1}-2};$$

et enfin $$n = \frac{2^{r+1}+1}{2(2^r-1)}.$$

93. Les formules auxquelles nous sommes parvenus, pour les séries ascendantes, s'appliquent, en sens inverse, aux séries descendantes, en sorte que nous sommes dispensés de chercher directement celles qui ont rapport à ces dernières séries.

Soit *adsg* (fig. 59) le ème quadrilatère que fig. 57, et qui est, comme nous l'avons dit, la coupe principale du générateur relative aux rhomboïdes qui naissent les uns des autres, en vertu du décroissement B. Il est facile de voir que la coupe du rhomboïde qui donne le premier terme de la série descendante, sera le quadrilatère *a*G*s*D, qui a le même axe que *adsg*, et dans lequel les lignes *a*G, *s*D, qui représentent deux bords supérieurs se confondent avec les diagonales obliques *ad*, *sg*.

Or, nous avons vu (p. 367) que le même rhomboïde qui est produit par tel autre en vertu du décroissement B, peut à son tour en produire un semblable à celui-ci, à l'aide du décroissement E''E; donc, si par les points *g*, *d*, on fait passer la coupe *a'd's'g'* du rhomboïde produit en vertu de ce dernier décroissement, par celui auquel appartient *adsg*, le rhomboïde dont il s'agit sera le premier terme de la série ascendante relative au décroissement E''E, c'est-à-dire que *a'd's'g'* sera semblable à *a'd's'g'* (fig. 58).

En faisant le même raisonnement par rapport aux rhomboïdes suivans, on en conclura que les for-

mules relatives à la série ascendante pour les décroissemens dont le signe est E''E, s'appliquent à la série descendante, pour les décroissemens qui ont pour signe B.

D'une autre part, soit *adsg* (fig. 60), le même quadrilatère que fig. 58, qui est la coupe du générateur, relative aux rhomboïdes produits les uns par les autres, à l'aide du décroissement E''E. On concevra aisément que la coupe du rhomboïde qui donne le premier terme de la série descendante, est le quadrilatère ADSG, dans lequel l'axe AS est le tiers de *as*, et les lignes AD, GS, qui représentent deux diagonales obliques, sont parallèles aux bords supérieurs *ag*, *ds*, du générateur.

Or, la propriété inverse de celle qui a été énoncée plus haut est également vraie; c'est-à-dire que le même rhomboïde qui naît de tel autre, à l'aide du décroissement E''E, est susceptible à son tour d'en produire un semblable à celui-ci, en vertu du décroissement B; donc si par les points *a*, *s*, on fait passer la coupe *ad'sg'* du rhomboïde qui résulte de ce dernier décroissement rapporté au générateur dont *adsg* représente la coupe, le rhomboïde dont il s'agit sera le premier terme de la série ascendante relative au décroissement B, ou, ce qui revient au même, *ad'sg'* sera semblable à *ad'sg'* (fig. 57).

Le même raisonnement s'étend aux rhomboïdes suivans, d'où l'on conclura que les formules relatives

qui se rapporte soit à
décroissemens B, soit à
décroissemens E''E; les
pour les décroissemens
les décroissemens invers

Si l'on égale r succes
on trouve

$$n = \frac{0}{3},\ n = 1,\ n$$

La première valeur de
que la diagonale oblique
confond avec l'arête du
dans la variété de chaux ca
(13).

La seconde valeur de n,
à la variété de fer

quand à la dernière valeur $\frac{17}{7}$, qui s'éloigne déjà de la simplicité des lois ordinaires, elle n'est probablement qu'hypothétique.

95. Passons à la formule $\frac{2^{r+1} \pm 1}{2(2^r \mp 1)}$, relative soit à la série ascendante pour les décroissemens E''E, soit à la série descendante pour les décroissemens B, les signes supérieurs ayant lieu dans le cas des décroissemens directs, et les inférieurs dans celui des décroissemens inverses.

En égalant de même successivement la quantité r à 1, 2, 3, 4, 5, on trouve

$$n = \frac{1}{2},\ n = \frac{3}{6},\ n = \frac{15}{14},\ n = \frac{33}{30},\ n = \frac{65}{62}.$$

Si l'on continue de prendre pour générateur le rhomboïde primitif de la chaux carbonatée, la première valeur de n, qui est $\frac{1}{2}$, donnera le rhomboïde inverse (p. 361); la seconde, qui est $\frac{3}{2}$, donnera le rhomboïde contrastant (p. 378).

Quant aux trois suivantes, leur défaut de simplicité semble leur donner l'exclusion parmi les produits de la cristallisation.

96. Les résultats precédens conduisent, par une marche différente, à la même filiation, entre les rhomboïdes nommés *équiaxe*, *primitif*, *inverse* et *contrastant*, que nous avons déjà déduite des rapports entre les demi-diagonales de ces rhomboïdes (14).

Je terminerai cet article par la solution d'un genre de problèmes qui achèvera de mettre dans tout

son jour la dépendance mutuelle qu'ont entre eux les cristaux d'une même espèce, en faisant voir sous combien de faces une même forme se présente à la théorie pour en varier les applications.

97. Soit *ss'* (fig. 61, pl. 20) un dodécaèdre à triangles scalènes. On peut concevoir dans l'intérieur du solide cinq rhomboïdes différens, dont chacun soit susceptible de le produire, à l'aide d'un décroissement simple. Le premier est celui dont les bords inférieurs analogues à D (fig. 62), se confondent avec les lignes *ge*, *en*, *nl*, etc. (fig. 61), et, dans ce cas, le dodécaèdre résultera d'un décroissement sur les bords dont il s'agit. Le second est celui dont les bords supérieurs B (fig. 62) se confondent avec les lignes *gs*, *sn* (fig. 61), c'est-à-dire avec les arêtes longitudinales les plus saillantes du dodécaèdre, prises deux à deux, en partant du sommet, et lesquelles deviendront alors les lignes de départ des décroissemens. Le troisième est celui dont les bords supérieurs B, coïncident au contraire avec les arêtes les moins saillantes *es*, *sl*, sur lesquelles agiront de même les décroissemens. Le quatrième aura ses faces parallèles aux arêtes les plus saillantes *gs*, *ns*, prises solitairement, et dans ce cas le dodécaèdre résultera d'un décroissement sur les angles latéraux E, E (fig. 62), de ce rhomboïde. Les faces du cinquième seront parallèles aux arêtes les moins saillantes *es*, *ls* (fig. 61), prises aussi une à une, et le décroissement qui donnera le dodécaèdre aura lieu de même sur les angles E.

Or, il suffit que le dodécaèdre puisse être produit par l'un quelconque des rhomboïdes dont il s'agit, pour que chacun des quatre autres soit également susceptible de faire à son égard la fonction de noyau. Dans la même hypothèse, si l'on choisit deux quelconques des cinq rhomboïdes, chacun pourra donner naissance à l'autre, ou naître de lui, en vertu d'un décroissement sur les angles supérieurs ou inférieurs. Nous nous bornerons ici aux résultats qui dérivent du premier rhomboïde considéré comme générateur, c'est-à-dire de celui dont les bords inférieurs se confondent avec les lignes *ge*, *en*, *nl*, etc.

98. Supposons d'abord que le noyau qu'il s'agit de substituer à ce générateur, pour en déduire hypothétiquement le dodécaèdre, soit celui dont les faces passent l'une par les lignes *sg*, *sn*, une seconde par les lignes *sn*, *sy*, etc.

Désignons par *g*, *p*, les demi-diagonales du générateur, par *g'*, *p'*, celles du noyau hypothétique, par *n* la loi de décroissement qui donne le dodécaèdre en agissant sur les bords inférieurs du générateur, et par *n'* celle qui le produirait en agissant sur les bords supérieurs du noyau hypothétique. Etant donné *g*, *p* et *n*, cherchons d'abord *g'* et *p'*.

Soit *adsg* (fig. 63) la coupe principale du générateur, *dp*, *gu*, deux des arêtes les moins saillantes du dodécaèdre, opposées entre elles, et *gp*, *du*, les deux arêtes saillantes situées dans le même plan. Soient *dr*, *gc*, des lignes perpendiculaires sur l'axe.

Si par le milieu *c* de la diagonale *ac* nous menons *pm*, elle sera une des diagonales obliques du noyau hypothétique, et *um* sera l'arête adjacente à cette diagonale vers le sommet inférieur.

Or, en reprenant ici ce qui a été dit plus haut, au sujet des décroissemens sur les bords supérieurs (p. 290), il est aisé de voir que la ligne *mo* perpendiculaire sur l'axe répond à *dr* (fig. 5, pl. 15). Donc

$$mo\ (\text{fig. } 63) = \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2};$$

mais

$$pu = as + 2ap = a + a \cdot \frac{2}{n-1} = \frac{n+1}{n-1}a \text{ (p. 369).}$$

Donc *uo* étant le tiers de l'axe *pu*, on aura

$$uo = \tfrac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)a = \frac{n+1}{3n-3}a.$$

$$uo : ur :: mo : dr;$$

$$ur = us + rs = \frac{1}{n-1}a + \tfrac{1}{3}a = \frac{n+2}{3n-3}a.$$

Donc

$$\frac{n+1}{3n-3}a : \frac{n+2}{3n-3}a :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

d'où l'on tire

$$g' = \frac{n+1}{n+2}g.$$

Mais

$$pu \text{ ou } \sqrt{9p'^2 - 3g'^2} = \frac{n+1}{n-1}a.$$

Donc

$$9p'^2 - 3\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 g^2 = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 a^2 ;$$

donc

$$R'^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 g^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 a^2 ;$$

donc

$$g' : p' :: \sqrt{\frac{1}{(n+2)^2}\cdot g^2} : \sqrt{\frac{1}{(n+2)^2}\cdot\frac{1}{3}g^2 + \frac{1}{(n-1)^2}\cdot\frac{1}{9}a^2}.$$

Cherchons maintenant le rapport de n' à n. La ligne dr étant la même que mu (fig. 5, pl. 15), pr (fig. 63, pl. 20) sera la même que au (fig. 5, pl. 15).

Or,

$$au = \frac{2n'-1}{3n'}\sqrt{9p'^2 - 3g'^2} \text{ (p. 292)};$$

$$pr(\text{fig. 63}) = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{2}{3}\right)\sqrt{9p^2 - 3g^2} = \frac{2n+1}{3n-3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

Donc

$$\frac{2n'-1}{3n'}\sqrt{9p'^2 - 3g'^2} = \frac{2n+1}{3n-3}\sqrt{9p^2 - 3g^2};$$

Mais

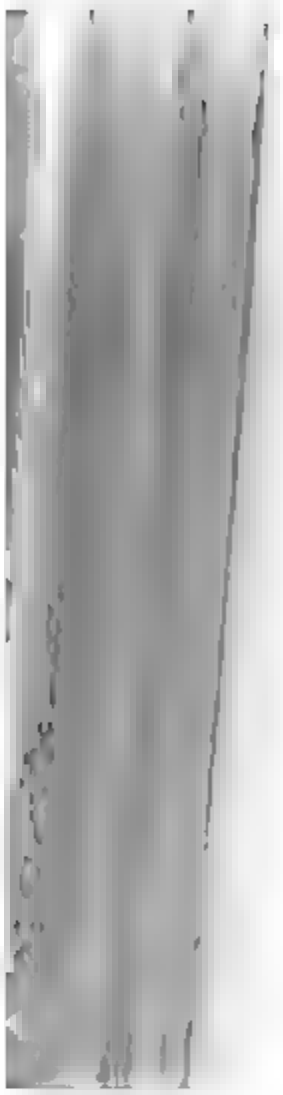
$$\sqrt{9p'^2 - 3g'^2} = pu = \frac{n+1}{n-1}\sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$

Donc

$$\frac{2n'-1}{3n'} \times \frac{n+1}{n-1} = \frac{2n+1}{3n-3};$$

d'où l'on tire

$$n' = n+1, \text{ et } n = n'-1.$$



$$ah = \frac{}{n''-}$$

Mais $ap : ah ::$

donc

$$ah = 2ap, \text{ e}$$

D'ailleurs le générateur é
au dodécaèdre et au rhor
de noyau hypothétique, r

$$\frac{1}{n^{\nu} - 1} =$$

ce qui donne

$$n^{\nu} = \frac{n}{-}$$

100. Soit $g = \sqrt{3}$, $p = \sqrt$
carbonatée, et $n = 2$. Le d
porte le nom de *métastat*

bords supérieurs du noyau hypothétique, dans lequel le rapport entre les demi-diagonales est celui de $\sqrt{3}$ à $\sqrt{17}$, et ce dernier, considéré comme forme secondaire du générateur, dépend d'un décroissement par trois rangées sur les angles inférieurs du même générateur; c'est-à-dire que le noyau hypothétique est semblable au rhomboïde contrastant (p. 378).

101. On connaît une variété de chaux carbonatée, représentée (fig. 64, pl. 20), dont le signe rapporté au véritable noyau est $e\overset{3}{D}\overset{3}{\underset{m\,r}{}}$, et qui offre la réunion du noyau hypothétique dont je viens de parler avec le dodécaèdre auquel il donnerait naissance en vertu du décroissement $\overset{3}{B}$. Assez souvent les faces *m* ont une étendue qui semble les rendre prédominantes, comme on le voit sur la figure, en sorte qu'ici les apparences sont pour l'hypothèse dans laquelle l'inverse serait le générateur du cristal.

102. Supposons maintenant que le noyau hypothétique soit le rhomboïde dont les faces passent, l'une par les lignes *sk*, *se*, une seconde par les lignes *se*, *sl*, etc., et continuons de nous servir de la figure 63. Si par le milieu *k* de la diagonale *gs* nous menons *px*, elle sera une des diagonales obliques du noyau hypothétique, et *ux* sera l'arête inférieure contiguë à cette diagonale. De plus, si du point *x* nous menons une perpendiculaire *xo* sur l'axe *pu*, il est évident qu'elle sera sur la direction de la per-

pendiculaire *mo*, relative au cas précédent, puisqu'elle doit aussi couper l'axe au tiers de la longueur de celui-ci.

Soient encore g', p', les diagonales du nouveau noyau hypothétique, et n' la loi qui le produirait en agissant sur ses bords supérieurs. Déterminons d'abord g' et p'. Nous aurons

$$xo = \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}, \text{ et } uo = \frac{n+1}{3n-3}a,$$

comme ci-dessus.

$$uo : un :: xo : gn;$$

mais

$$un = us + ns = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{2}{3}\right)a = \frac{2n+1}{3n-3}a.$$

Donc

$$n+1 : 2n+1 :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

d'où l'on tire

$$g' = \frac{n+1}{2n+1}g.$$

D'une autre part,

$$\sqrt{9p'^2 - 3g'^2} = \frac{n+1}{n-1}a,$$

comme ci-dessus, et à cause de

$$3g'^2 = 3\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^2 g^2, \quad 9p'^2 - 3\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^2 g^2 = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 a^2,$$

Donc

$$p'^2 = \tfrac{1}{3}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^2 g^2 + \tfrac{1}{9}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 a^2.$$

Donc

$$g' : p' :: \frac{1}{2n+1}g : \sqrt{\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 g^2 + \tfrac{1}{9}\left(\frac{1}{n-1}\right)^2 a^2}.$$

103. Passons au rapport de n' à n. La ligne gn étant la même que mu (fig. 5, pl. 15), pn (fig. 63, pl. 20) sera la même que au (fig. 5, pl. 15). Or,

$$au = \frac{2n'-1}{3n'}\,a' \text{ (p. 292)},$$

$$pn\text{(fig. 63)} = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{3}\right)a = \frac{n+2}{3n-3}a.$$

Donc

$$\frac{2n'-1}{3n'}\,a' = \frac{n+2}{3n-3}a.$$

Mais d'après ce qui a été dit (p. 421),

$$a' = \frac{n+1}{n-1}\,a.$$

Donc

$$\frac{2n'-1}{3n'}\cdot\frac{n+1}{n-1} = \frac{n+2}{3n-3}, \text{ ou } \frac{2n'-1}{n'}\cdot(n+1) = n+2;$$

ce qui donne

$$n' = \frac{n+1}{n} \text{ et } n = \frac{1}{n'-1}.$$

Maintenant désignons par n'' l'expression de la loi qui produirait le noyau hypothétique, comme forme secondaire du générateur, en agissant par renversement sur l'angle inférieur e de celui-ci. Si nous menons gl parallèle à px, gl sera une des diagonales obliques du noyau hypothétique, et nous aurons

$$al = \frac{n''}{1-n''}\,a \text{ (p. 371)}.$$

D'une autre part, les triangles semblables skp,

sgl, donnent

$$sp : sl :: sk : sg :: 1 : 2;$$

donc $sl = 2sp$, et $pl = sp$;

donc puisque $al = ap + pl$, on aura aussi

$$al = ap + sp = 2(as) + ap = \left(\frac{2}{n-1} + 1\right)a = \frac{n+1}{n-1}a;$$

et égalant les deux valeurs de *al*,

$$\frac{n''}{1-n''} = \frac{n+1}{n-1};$$

d'où l'on tire

$$n'' = \frac{n+1}{2n}, \text{ et } n = \frac{1}{2n''-1}.$$

104. Supposons de nouveau que le dodécaèdre secondaire soit le métastatique. Nous aurons encore

$$n = 2, g = \sqrt{3}, a = \sqrt{9};$$

donc

$$g' : p' :: \tfrac{1}{5}\sqrt{3} : \sqrt{\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{15}\cdot 3 + 1} :: \sqrt{3} : \sqrt{26}.$$

Dans le même cas,

$$n' = \tfrac{3}{2}, \quad \text{et} \quad n'' = \tfrac{3}{4};$$

c'est-à-dire que le noyau hypothétique est semblable au rhomboïde mixte (p. 386), et que le dodécaèdre peut résulter d'un décroissement par trois rangées en largeur et deux en hauteur sur les bords supérieurs de ce rhomboïde.

La variété sextrigésimale de chaux carbonatée (fig. 65), dont le signe est $\overset{a}{e}\overset{3}{e}\overset{\frac{a}{1}}{e}\overset{a}{D}B$, présente la réunion de ce même rhomboïde et du précédent avec le dodécaèdre métastatique, c'est-à-dire celle des deux noyaux hypothétiques avec le solide auquel chacun d'eux pourrait servir de générateur. Cette variété renferme en même temps les pans du prisme hexaèdre régulier, et les faces du rhomboïde équiaxe.

105. Concevons maintenant que le rhomboïde qui peut être substitué au générateur, dans la production du dodécaèdre, soit celui dont les faces seraient parallèles aux arêtes les plus saillantes sn (fig. 61), sg, sy, etc. Soient toujours g, p, les demi-diagonales du générateur, g', p', celles du noyau hypothétique, n l'expression de la loi en vertu de laquelle le générateur produirait le dodécaèdre, n' celui de la loi qui aurait lieu sur les angles latéraux du rhomboïde hypothétique substitué au générateur, et n'' celui de la loi à l'aide de laquelle le générateur produirait le noyau hypothétique. Etant données g, p, n, il s'agit de trouver les autres quantités. Cherchons d'abord g' et p'.

Soient $adsg$ (fig. 66, pl. 21), et $dpgu$ les mêmes quadrilatères que fig. 63, pl. 20, et soit $a'd's'g'$ (fig. 66) la coupe principale du noyau hypothétique. Ayant mené $g'n'l$ perpendiculaire sur l'axe pu, nous aurons, à cause du parallélisme des lignes $a'd'$, pg, $gn : pn :: ln' : a'n'$.

Or,

$$pn = ap + an = \left(\frac{1}{n-1}a + \frac{1}{3}a\right) = \frac{n+2}{3n-3}a;$$

donc substituant,

$$gn : \frac{n+2}{3n-3}a :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^{2}} : \tfrac{1}{3}a';$$

D'une autre part,

$$gn : un :: d'r' : ur' = us' + r's' :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^{2}} : us' + \tfrac{1}{3}a'.$$

Mais

$$un = us + ns = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{2}{3}\right)a = \frac{2n+1}{3n-3};$$

donc substituant,

$$gn : \frac{2n+1}{3n-3}a :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^{2}} : us' + \tfrac{1}{3}a'.$$

La première proportion donne

$$gn = \frac{n+2}{3n-3}a\sqrt{\frac{\frac{1}{3}g'^{2}}{\frac{1}{3}a'}} = \frac{(n+2)a}{(n-1)a'}\sqrt{\tfrac{1}{3}g'^{2}},$$

et la seconde

$$gn = \frac{\frac{2n+1}{3n-3}a\ \sqrt{\frac{1}{3}g'^{2}}}{us' + \frac{1}{3}a'};$$

Egalant les deux valeurs de gn, et supprimant les facteurs communs aux deux membres, on trouve

$$\frac{n+2}{a'} = \frac{4n+2}{3us' + a'},$$

d'où l'on tire

$$us' = a'\left(\frac{4n+2}{3n+6}\right) - \tfrac{1}{3}a' = a' \cdot \frac{n}{n+2}.$$

D'une autre part,

$$us' = pu - ps' = pu - a'p - a's' = \frac{n+1}{n-1}a - us' - a';$$

donc

$$2(us') = \frac{n+1}{n-1}a - a',$$

et

$$2(us') = \frac{\frac{n+1}{n-1}a - a'}{2} = a' \cdot \frac{n}{n+2};$$

d'où l'on tire

$$a' = \frac{n+1}{n-1}a \cdot \frac{n+2}{3n+2}.$$

Mais nous avons eu gn ou

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = \frac{(n+2)a}{(n-1)a'}\sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2};$$

donc

$$2g = \frac{(n+2)a}{(n-1)a'}g', \text{ et } g' = \frac{(2n-2)a'}{(n+2)a} \cdot g;$$

et substituant à la place de a' sa valeur,

$$g' = \frac{2n+2}{3n+2} \cdot g.$$

De plus, nous avons eu

$$a' = \frac{n+1}{n-1} \cdot a \cdot \frac{n+2}{3n+2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$9g'^2 - 3g'^2 = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 a^2 \left(\frac{n+2}{3n+2}\right).$$

Et mettant à la place de g'^2 sa valeur,

$$9p'^2 - 3g^2\left(\frac{2n+2}{3n+2}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 a^2 \left(\frac{n+2}{3n+2}\right),$$

d'où

$$p' = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{1}{9n+6} \sqrt{a^2(n+2)^2 + 12g^2(n-1)^2};$$

donc

$$g' : p' :: g(6n-6) : \sqrt{a^2(n+2)^2 + 12g^2(n-1)^2}.$$

106. Dans toutes les recherches du genre de celle-ci, je détermine d'abord les valeurs absolues de g' et de p', pour en conclure ensuite le rapport de ces lignes, parce que les solutions des problèmes en sont plus complètes. On abrégerait beaucoup le calcul en se bornant à trouver immédiatement ce rapport. Par exemple il suffirait, dans le cas précédent, d'avoir la proportion

$$gn \text{ ou } \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{n+2}{3n-3}.a :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2} : \tfrac{1}{3}a' \text{ (p. 427)},$$

qui se change en celle-ci,

$$2g : \frac{n+2}{3n-3}.a\sqrt{3} :: \sqrt{g'^2} : \sqrt{3p'^2 - g'^2}.$$

Elevant tout au carré, et égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, puis transposant, on

trouve

$$12g^2p'^2=\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 3a^2g'^2-4g^2g'^2;$$

d'où l'on tire

$$g'^2:p'^2::12g^2:\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 3a^2+4g^2;$$

donc

$$g':p'::2g\sqrt{3}:\sqrt{\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)^2 3a^2+4g^2}$$

$$::(3n-3)2g:\sqrt{(n+2)^2a^2+12(n-1)^2g^2}$$

$$::g(6n-6):\sqrt{(n+2)^2a^2+12(n-1)^2g^2},$$

ce qui est le même rapport que ci-dessus.

107. Pour trouver le rapport de n' à n, je reprends l'équation us' ou $a'p=a'.\frac{n}{n+2}$. D'une autre part, considérant le dodécaèdre comme produit par un décroissement sur les angles latéraux du noyau hypothétique, nous aurons

$$a'p=\frac{1}{2n'}a' \text{ (p. 351).}$$

Donc $$\frac{1}{2n'}=\frac{n}{n+2},$$

ce qui donne

$$n'=\frac{n+2}{2n}, \text{ et } n=\frac{2}{2n'-1}.$$

Il reste à déterminer n''. Pour y parvenir, j'observe que la diagonale oblique $a'a''$ du noyau hypothétique étant parallèle à l'arête pg du dodécaèdre, si l'on imagine que le rhombe auquel appartient la pre-

mière se meuve parallèlement à lui-même, jusqu'
ce qu'il se trouve en contact avec la seconde, il e
facile de voir que le noyau hypothétique se trouve
situé à l'égard du générateur dont la coupe est *adg*
comme un rhomboïde produit en vertu d'un décroi-
sement inverse sur les angles *e* de ce générateur.
Donc *pg* répond à la même ligne (fig. 43, pl. 18)

Donc ap (fig. 66, pl. 21) $= \frac{n''}{1-n''} . a$ (p. 371);

mais *ap* rapporté au dodécaèdre a pour expressio

$$\frac{1}{n-1} . a;$$

donc

$$\frac{n''}{1-n''} = \frac{1}{n-1};$$

d'où l'on tire

$$n'' = \frac{1}{n} \text{ et } n = \frac{1}{n''}.$$

Soit encore $g = \sqrt{3}$, $p = \sqrt{2}$, $a = \sqrt{9}$, et $n =$
Nous aurons

$$g' : p' :: \sqrt{3} : \sqrt{5}. \quad n' = 1, \text{ et } n'' = \tfrac{1}{2};$$

c'est-à-dire que le no thétique est semblabl
au rhomboïde inver), et c le dodécaèdr
peut naître du déc E porté à c
rhomboïde.

La variété progres) d x carb
tée, dont le signe es offre on d

du rhomboïde dont c

caèdre métastatique et celles du rhomboïde contrastant, en sorte que l'on a ici une espèce de conflit entre deux noyaux hypothétiques dont chacun serait susceptible de produire le dodécaèdre.

108. Il existe parmi les cristaux d'argent antimonié sulfuré une variété qui a beaucoup de rapport avec la précédente. La forme primitive de cette substance métallique est un rhomboïde obtus (fig. 62, pl. 20), dans lequel le rapport de g à p est celui des nombres $\sqrt{5}$ à $\sqrt{3}$, ce qui donne $109^d\ 28'$ pour la plus grande incidence des faces, et $70^d\ 32'$ pour la plus petite. Dans le même rhomboïde, les angles plans sont l'un de $104^d\ 28'$, et l'autre de $75^d\ 32'$. La variété dont il s'agit, qui est représentée (fig. 68), se nomme *unibinaire*, et a pour signe $\mathring{D}E^{1}_{h}{}''E_{i}$, en sorte qu'elle ne diffère de la première, relativement aux lois de la structure, que par l'absence des faces analogues à m, m' (fig. 67). En appliquant ici les formules relatives aux décroissemens sur les bords inférieurs (p. 324 et 325), on trouve pour l'incidence de h sur h (fig. 68), $144^d\ 54'$, et pour celle de h sur h', $105^d\ 48'$. La première de ces incidences n'excède que d'environ un demi-degré celle de r sur r (fig. 67), et la seconde de $1^d\frac{1}{2}$, celle de r sur la face adjacente à f, dans le dodécaèdre métastatique, qui résulte de la même loi $\mathring{D}$. Cependant la différence est de 5^d entre incidences des faces primitives, dont l'une est $109^d\ 28'$, et l'autre de $184^d\ 28'$. Mais cette diffé-

rence s'atténue en passant dans les résultats des décroissemens qui donnent les formes secondaires.

Si l'on cherche le rapport entre les demi-diagonales γ, π, du noyau hypothétique auxquelles appartiennent les faces i (fig 68), en employant les formules que nous avons données (p. 429), on trouve

$$\gamma : \pi :: \sqrt{5} : \sqrt{7},$$

ce qui donne d'une part 80d 26′, pour l'angle plan au sommet du rhomboïde, et 99d 34′ pour l'angle latéral; et d'une autre part 98d 13′ pour la plus grande incidence des faces, et 80d 26′ pour la plus petite. La loi E′′E ou $\dot{e}$, d'où dérive le même rhomboïde, ne pouvant être dans le cas présent, comme pour la chaux carbonatée, celle qui produit l'inverse du générateur, si l'on cherche cette dernière à l'aide de la formule $n = \frac{g^2+p^2}{2g^2-2p^2}$ (p. 398), on trouve $n = 2$, c'est-à-dire que l'inverse du véritable noyau de l'argent antimonié sulf[illegible] résulterait d'un décroissement direct par quatre [illegible] sur les angles inférieurs e de ce noyau. Ain[illegible] rhomboïde inverse est dans le[illegible] naires de la structure, quoique [illegible] aisse aucun exemple.

109. Prenons mai[illegible] hypothé[illegible] que le rhomboïde do[illegible] les au[illegible] les moins saillant[illegible] et[illegible] décaèdre, et dési[illegible]

mêmes lignes que ci-dessus (p. 427), et par n, n', n'', les exposans des lois relatives aux mêmes parties, soit du générateur, soit du noyau hypothétique. Nous nous servirons de la figure 69, qui est semblable à la figure 66, avec la différence que dans la première la coupe principale $a'd's'g'$ du noyau hypothétique a ses côtés $a'd'$, $g's'$, parallèles aux arêtes dp, gu, comme cela doit être. Nous aurons égard à cette différence dans la solution du problème, qui d'ailleurs suivra la même marche que le précédent.

Cela posé, dr (fig. 69) : pr :: ln' : $a'n'$, ou

$$dr : \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{3}\right)a = \frac{2n+1}{3n-3} :: \sqrt{\tfrac{1}{36}g'^2} : \tfrac{1}{3}a'.$$

D'une autre part,

$$dr : ur = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{3}\right)a :: d'r' : u'r,$$

ou $$dr : \frac{n+2}{3n-3} :: \sqrt{\tfrac{4}{36}g'^2} : us' + \tfrac{1}{3}a'.$$

La première proportion donne

$$dr = \frac{(2n+1)a}{(n-1)a'}\sqrt{\tfrac{1}{36}g'^2},$$

et la seconde

$$dr = \frac{\frac{n+2}{3n-3} \cdot a\sqrt{\frac{4}{36}g'^2}}{us' + \frac{1}{3}a'}.$$

Égalant les deux valeurs de dr, puis réduisant,

$$\frac{2n+1}{a'} = \frac{2n+4}{3(us') + a'};$$

d'où l'on tire

$$us' = a' \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

D'une autre part,

$$us' = pu - ps' = \frac{\frac{n+1}{n-1}a - a'}{2};$$

donc

$$\frac{\frac{n+1}{n-1}a - a'}{2} = a' \cdot \frac{1}{2n+1},$$

ce qui donne

$$a' = \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{n+1}{n-1}a;$$

mais dr ou

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = \frac{(2n+1)a}{(n-1)a'}\sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2}, \text{ ou } 2g = \frac{(2n+1)a}{(n-1)a'} \cdot g'.$$

Substituant à la place de a' sa valeur, nous aurons

$$g' = g \cdot \frac{2n+2}{2n+3}.$$

La même valeur de a' peut être mise aussi sous cette forme,

$$\sqrt{9p^2 - 3g'^2} = \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{n+1}{n-1}a,$$

et élevant tout au carré, puis laissant la quantité p' seule dans le premier membre,

$$p' = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{1}{6n+9}\sqrt{a^2(2n+1)^2 + 12g^2(n-1)^2};$$

donc

$$g' : p' :: g(6n-6) : \sqrt{a^2(2n+1)^2+12g^2(n-1)^2},$$

rapport qui ne diffère de celui que nous avons trouvé, pour le cas précédent, que par le facteur de a^2, qui est d'une part $n+2$, et de l'autre $2n+1$.

110. Pour trouver la relation de n' à n, reprenons l'équation us' ou $a'p = \frac{a'}{2n+1}$. Si nous considérons le dodécaèdre comme le résultat d'un décroissement sur les angles latéraux du noyau hypothétique, nous aurons $a'p = \frac{1}{2n'}a'$ (p. 351). Donc $\frac{1}{2n'} = \frac{1}{2n+1}$; d'où l'on tire

$$n' = \frac{2n+1}{2} \text{ et } n = \frac{2n'-1}{2}.$$

Maintenant pour avoir n'', imaginons que le rhombe auquel appartient la diagonale $a'd'$, se meuve parallèlement à lui-même, jusqu'à ce que cette diagonale coïncide avec dp; le noyau hypothétique se trouvera situé à l'égard du générateur, comme un rhomboïde qui naîtrait d'un décroissement direct sur les angles inférieurs e de ce générateur. Donc pd répond à la même ligne (fig. 42, pl. 18). Donc

$$ap \text{ (fig. 69)} = \frac{1}{n''-1}.a \text{ (p. 369)}.$$

Mais la valeur de ap rapportée au dodécaèdre est

$$\frac{1}{n-1}.a; \text{ donc } \frac{1}{n''-1} = \frac{1}{n-1},$$

ce qui donne $n'' = n$.

111. La chaux carbonatée nous fournit encore une application de ces divers résultats, dans une variété représentée figure 70, qui porte le nom de *dodécaèdre*, et dont le signe est $\overset{\frac{3}{2}}{\underset{ym}{D}}{}^{2}e$. On voit, par la seule inspection de la figure, qu'elle offre l'aspect d'un solide produit par un décroissement incomplet, qui donnerait les faces y, y', en agissant sur les angles latéraux du rhomboïde auquel appartiennent les faces m, m'. Mais si l'on cherche les angles de ce solide dans l'hypothèse du véritable noyau, c'est-à-dire si l'on fait $g = \sqrt{3}$, $a = 3$, et $n = \frac{3}{2}$, dans les formules relatives aux décroissemens sur les bords inférieurs (p. 324 et 325), on trouve que l'incidence de y sur y est de $134^d\,25'\,2''$, et celle de y sur y de $108^d\,56'\,2''$. En faisant les mêmes substitutions dans l'expression générale du rapport entre les diagonales g' et p' du rhomboïde hypothétique (p. 435), on aura $g' : p' :: \sqrt{3} : \sqrt{17}$; de plus, la formule

$$n' = \frac{2n+1}{2} \text{ donne } n' = \frac{5}{3},$$

et à cause de $n'' = n$, on a $n'' = \frac{3}{2}$; c'est-à-dire que le noyau hypothétique est le rhomboïde contrastant (p. 378), et que le dodécaèdre peut être produit en vertu d'un décroissement par cinq rangées sur les angles latéraux de ce rhomboïde.

112. Si l'on imagine que les faces gse (fig. 61, pl. 20), esn, etc., en restant fixes par leurs bords ge,

en, etc., se relèvent par leur sommet *s*, de manière à faire des angles toujours plus petits avec l'axe du dodécaèdre, il y aura un terme où elles lui deviendront parallèles, et alors celles qui sont situées de part et d'autre d'une même arête *ge*, *en*, etc., étant de niveau, les douze faces n'en feront plus que six, qui se trouveront situées comme les pans d'un prisme hexaèdre régulier. Dans le même cas, les arêtes *es*, *ns*, etc., étant aussi parallèles à l'axe, chacun des deux noyaux hypothétiques se trouvera transformé en un prisme triangulaire équilatéral d'une hauteur infinie. Alors la quantité n' étant la même de part et d'autre dans les formules

$$n' = \frac{n+2}{2n} \text{ (p. 431), et } n' = \frac{2n+1}{2} \text{ (p. 435),}$$

on aura

$$\frac{n+2}{2n} = \frac{2n+1}{2},$$

ce qui donne $n = 1$, comme cela doit être, d'après ce qui a été dit (p. 341). Maintenant si l'on reprend l'une quelconque des formules qui donnent les valeurs de n', par exemple celle-ci, $n' = \frac{2n+1}{2}$, et que l'on fasse $n = 1$, on trouve $n' = \frac{3}{2}$, c'est-à-dire qu'alors le dodécaèdre est censé être produit en vertu d'un décroissement représenté par $\frac{3}{2}$, sur les angles latéraux de l'un ou l'autre noyau hypothétique. Voici ce que signifie ce résultat. Supposons que l'hexagone régulier *akodfg* (fig. 71) représente la

coupe horizontale du dodécaèdre; le triangle équilatéral *aof* représentera en même temps celle de l'un ou de l'autre des noyaux hypothétiques. Soit *kh* une perpendiculaire sur *ao*, et soit *oxz* le triangle qui est censé faire ici la fonction de mensurateur. Il sera l'analogue du petit triangle *bnm* (fig. 27, pl. 17), qui est relatif aux décroissemens sur les angles latéraux. On aura donc

$$ox : xz :: bn : nm \text{ (p. 349)} :: 2n : \sqrt{\frac{3p^2 - g^2}{p^2}}.$$

Or, dans le cas présent, $n = \frac{3}{2}$; et de plus la diagonale p étant infinie, la quantité g^2 s'évanouit. Donc

$$ox : xz \text{ (fig. 71)} :: 2n : \sqrt{\frac{3p^2}{p^2}} :: 2n : \sqrt{3} :: 3 : \sqrt{3} :: \sqrt{3} : 1$$

ce qui s'accorde avec l'hypothèse présente, puisque ce rapport $\sqrt{3} : 1$ est celui de *oh* à *hk*, par une suite de ce que *akodfg* est un hexagone régulier. Mais ce résultat est purement idéal, le prisme triangulaire équilatéral étant exclus du nombre des formes primitives employées par la cristallisation.

II. DES DÉCROISSEMENS INTERMÉDIAIRES RELATIFS AU RHOMBOÏDE.

113. Les décroissemens nommés *intermédiaires* dépendent de deux élémens variables qui doivent entrer dans leur calcul. L'un est le rapport entre les nombres d'arêtes de molécule soustraites sur les deux côtés de l'angle vers lequel se fait le décroissement.

L'autre est le nombre de rangées soustraites, ou la distance entre le même angle et le bord de la première lame de superposition. La fraction $\frac{y}{x}$ représentera le rapport dont je viens de parler, et je continuerai de désigner par n le nombre de rangées soustraites.

A mesure que y diminue à l'égard de x, le bord de chaque terme s'incline toujours davantage sur l'arête dont x fait partie, jusqu'à ce qu'enfin il se confonde avec cette arête, au point où y s'évanouit. D'une autre part, à mesure que y augmente à l'égard de x, le bord de chaque lame décroissante approche davantage du parallélisme avec la diagonale opposée à l'angle vers lequel se fait le décroissement, et lorsque y devient égal à x, on a un décroissement ordinaire sur les angles.

Il suit de là que cette espèce de décroissement n'est autre chose que le dernier terme de la série des décroissemens intermédiaires, en sorte que dans les formules générales qui représentent ces décroissemens, et dont la recherche est l'objet de cet article, il suffira de faire $y = x$, pour avoir les résultats relatifs aux décroissemens proprement dits sur les angles. Je n'ai pas laissé de donner des formules particulières pour ces derniers décroissemens, qui sont plus familiers à la cristallisation, parce que l'usage de ces formules revenant à chaque instant, il est plus commode de les trouver toutes préparées, sans être obligé de les simplifier, en faisant disparaître x et y.

Les décroissemens intermédiaires relatifs au rhomboïde peuvent agir, soit sur les angles latéraux E, et cela de deux manières différentes, suivant que x répond aux bords inférieurs D, et y aux bords supérieurs B, ou que c'est l'inverse qui a lieu; soit sur l'angle inférieur e, soit sur l'angle supérieur A. Dans ces derniers décroissemens, x et y répondent toujours l'un et l'autre aux deux bords D ou B, adjacens à l'angle qui subit le décroissement. Je vais exposer successivement les résultats relatifs à ces quatre modifications.

I. *Décroissemens intermédiaires sur les angles* E, *x étant dans le sens de* D, *et y dans le sens de* B.

114. Soit *audb* (fig. 72, pl. 21) une des faces supérieures du rhomboïde qui fait la fonction de générateur, et $\gamma\lambda, \pi\zeta$ deux parallèles aux bords produits par le décroissement. Il est facile de concevoir qu'ici comme dans les décroissemens ordinaires sur les angles latéraux, le solide secondaire sera en général un dodécaèdre à triangles scalènes. Soit XH (fig. 73) ce dodécaèdre, et *as* le noyau rhomboïdal qui lui est inscrit; soit de plus *adsg* (fig. 74) la coupe principale du noyau; soient gx, gh, les mêmes arêtes que QX, QH (fig. 73), dont la dernière passe par l'angle *d*, et l'autre se forme à une certaine distance au-dessus de la diagonale *ad* (fig. 74). Quant aux lignes vx, vh, elles représentent les arêtes opposées aux précédentes sur le dodécaèdre. Menons *dp* parallèle à qx;

elle sera située comme la diagonale oblique d'un rhomboïde résultant d'un décroissement sur l'angle *d*, dans lequel la distance d'une lame à l'autre, prise dans le sens de *da*, serait la même que pour le dodécaèdre dont il s'agit. Soit *dkf* le triangle mensurateur rapporté au plan *pds* ; *kf* représentera une arête de molécule, c'est-à-dire que si nous désignons par g' la demi-diagonale horizontale, et par p' la demi-diagonale oblique de la molécule, nous aurons

$$kf = \sqrt{g'^2 + p'^2}.$$

Reste à trouver l'expression de *dk*.

Pour y parvenir, concevons que la position de la ligne $\gamma\lambda$ (fig. 72) soit relative au cas où il n'y aurait qu'une rangée de soustraite par l'effet du décroissement intermédiaire sur l'angle *u*. Menons $\lambda\mu$ parallèle à *da*, $\gamma\pi$ perpendiculaire sur $\lambda\mu$, $d\varepsilon$ parallèle à $\gamma\lambda$, puis ayant pris $\varepsilon\vartheta$ égale à $u\gamma$, menons $\vartheta\nu$ parallèle à $d\varepsilon$, et enfin $\nu\varphi$ parallèle à *au*. Il est clair que $d\varepsilon$, et enfin $\nu\vartheta$ répondront aux bords de deux lames consécutives, et par conséquent $d\nu$ sera la distance d'une lame à l'autre, prise dans le sens de *da*, en ne supposant toujours qu'une rangée de soustraite. Ainsi l'on aura $d\nu . n = dk$ (fig. 74). La question se réduit donc à trouver l'expression algébrique de $d\nu$ (fig. 72).

Or, $\lambda\mu$ mesure autant de fois la demi-diagonale oblique d'une molécule, qu'il y a d'arêtes de molécule contenues dans $u\lambda + u\mu = 2x\sqrt{g'^2 + p'^2}$; donc

on peut représenter $\lambda\mu$ par $2p'x$. D'une autre part,

$$\omega v = \omega\vartheta = \nu\gamma = y\sqrt{g'^2+p'^2}.$$

Or, les triangles semblables ωvd, $\gamma\mu\lambda$, donnent

$$\gamma\mu : \lambda\mu :: \omega v : dv,$$

ou

$$(x-y)\sqrt{g'^2+p'^2} : 2p'x :: y\sqrt{g'^2+p'^2} : dv = \frac{2p'xy}{x-y}.$$

Donc

$$dk\ (\text{fig. } 74) = \frac{2p'nxy}{x-y};$$

donc

$$dk : kf :: \frac{2p'nxy}{x-y} : \sqrt{g'^2+p'^2};$$

ou, parce que les dimensions de la molécule sont proportionnelles à celles du noyau,

$$dk : kf :: \frac{2pnxy}{x-y} : \sqrt{g^2+p^2}.$$

Si nous prolongeons ga jusqu'à la rencontre y de dp, nous aurons aussi

$$da : ay :: \frac{2pnxy}{x-y} : \sqrt{g^2+p^2} :: 2p : \frac{x-y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2}.$$

Donc, puisque $da = 2p$, nous aurons

$$ay = \frac{x-y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2}.$$

115. Cherchons aussi le prolongement av de da, jusqu'à la rencontre de vx.

Soit as (fig. 75) le même générateur que fig. 74;

soient *tm*, *dψ*, les lignes de départ du décroissement considéré sur la face *audb*, et *tu* celle qui leur correspond vers l'angle *b* considéré sur la face *abng*. Bornons-nous à considérer ce qui se passe à l'égard de *tm* et *tu*, et menons *my*, *ty*, *ue*, *te*, de manière que les plans *tmy*, *tue* soient parallèles aux faces CXQ, CXB (fig. 73). Soient enfin *mftb* (fig. 75), *rtbu*, *mlyb*, *bexu*, les parallélogrammes qui ont pour diagonales les lignes *tm*, *tu*, *my*, *eu*. Nous aurons $ez = by$, et $yz = be$. Menons la diagonale *bz* du rhombe *bezy*, et par le point *c* où elle coupe *ue* et *my*, menons *ct*. Il est aisé de voir que le triangle *bct* est semblable au triangle *vag* (fig. 74). Car si l'on suppose que le rhomboïde *as* (fig. 75) soit tourné de manière que l'angle *b* coïncide avec l'angle *g* (fig. 74), *bc* (fig. 74) tombera sur *gs* (fig. 74), *bt* sur *ga*, et *ct* sera parallèle à l'intersection *vx* des deux faces qui se réunissent sur cette même arête.

Or *bm* et *bt* (fig. 75) renferment autant de fois, l'une la quantité $x\sqrt{g'^2+p'^2}$, et l'autre la quantité $y\sqrt{g'^2+p'^2}$, qu'il y a de rangées soustraites; donc

$$bm = nx\sqrt{g'^2+p'^2}, \text{ et } bt = ny\sqrt{g'^2+p'^2}.$$

De plus, *by* étant égale à la différence en hauteur entre deux lames consécutives de superposition, prise dans un sens parallèle à *bn*, il est visible que *by* est égale à *kf* (fig. 74). Donc $by = \sqrt{g'^2+p'^2}$.

Les triangles semblables bmc, yzc (fig. 75), donnent

$$bm:yz::by:bc::cz:cz, \text{ ou } bm:by::bc:bz-bc.$$

Substituant les valeurs algébriques, et faisant attention que $bz=2p'$, par une suite de ce que

$$by=\sqrt{g'^2+p'^2},$$

on aura

$$nx\sqrt{g'^2+p'^2}:\sqrt{g'^2+p'^2}::bc:2p'-bc;$$

d'où l'on tire

$$bc=\frac{2p'nx}{nx+1}.$$

Donc

$$bt:bc::ny\sqrt{g'^2+p'^2}:\frac{2p'nx}{nx+1}::\sqrt{g'^2+p'^2}:\frac{2p'x}{nxy+y}$$
$$::\sqrt{g^2+p^2}:\frac{2px}{nxy+y};$$

Mais

$$bt:bc::ag=\sqrt{g^2+p^2}:ar \text{ (fig. 74)};$$

donc
$$ar=\frac{2px}{nxy+y}.$$

116. Cherchons encore ap et ax.

1°. Pour ap. Les triangles semblables pay, psd,

donnent
$$ap:ay::ap+as:ds,$$

ou

$$ap:\frac{x-y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2}::ap+a:\sqrt{g^2+p^2};$$

d'où l'on tire

$$ap = \frac{x-y}{nxy-x+y}.a.$$

2°. Pour ax. Les triangles xar, xsg, étant semblables, on a

$$ax : ar :: ax+as : sg,$$

ou

$$ax : \frac{2px}{nxy+y} :: ax+a : 2p;$$

ce qui donne

$$ax = \frac{x}{nxy-x+y}.a.$$

117. Avant d'appliquer les données précédentes, j'observe que si l'on fait passer dans le dodécaèdre six plans coupans, dont chacun coïncide avec deux arêtes latérales contiguës, telles que CQ, CB, ces plans intercepteront un rhomboïde inscrit dans le dodécaèdre, comme le rhomboïde calcaire primitif l'est dans le cristal métastatique (*voyez* p. 41).

J'ai à prouver que ce rhomboïde peut être substitué, comme noyau hypothétique, au générateur, de manière à en faire dériver le dodécaèdre, par une loi ordinaire de décroissement sur les bords inférieurs, et que le même rhomboïde est susceptible à son tour d'être produit par le générateur comme forme secondaire.

Cherchons d'abord les expressions des demi-diagonales g' et p' du rhomboïde dont il s'agit. Soit $\gamma q r v$

sant la somme $as+$
déduirons la valeu
place dans la premiè
nous donnera l'expre

Maintenant

$$hr=ax+\tfrac{1}{3}a=\frac{x}{nxy+y}$$

$$pr=ap+\tfrac{2}{3}a=\left(\frac{x-}{nxy+y}\right.$$

donc

$$eh:ex::nxy+2a$$

Maintenant, soit nx
$2nxy+x-y=n'$. Nous

$$m'+n':m'::hx$$

et mettant à la place de
valeurs

donc la proportion $dr:hr::qe:eh$ deviendra

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}:\frac{nxy+2x+y}{3nxy+3y-3x}.a::qe:a\left(\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}.\frac{nxy+2x+y}{3nxy+3x}\right);$$

ou
$$g:\tfrac{1}{3}::g':\frac{nxy+x+y}{3nxy+3x};$$

d'où l'on tire

$$g'=g.\frac{nxy+x+y}{nxy+x}.$$

Pour avoir la valeur de p', commençons par chercher celle de $\gamma\varepsilon$ ou de a', qui est le triple de la différence entre eh et ex.

Nous avons eu plus haut

$$eh:ex::nxy+2x+y:2nxy+x-y;$$

donc

$$eh+ex:eh-ex::3nxy+3x:x+2y-nxy.$$

Mais

$$eh+ex \text{ ou } hx=\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}.a.$$

Substituant cette valeur à la place de $eh+ex$, et $\frac{1}{3}a'$ à la place de $eh-ex$, nous aurons

$$\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}.a:\tfrac{1}{3}a'::3nxy+3x:x+2y-nxy;$$

d'où l'on tire

$$a'=a.\frac{x+2y-nxy}{nxy+x}.\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y};$$

donc

$$9p'^2-3g'^2=a^2\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy+y}\right)^2\left(\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}\right)^2.$$

$e' : p' :: e$

118. Voyons
dodécaèdre résu
inférieurs du no
de rangées soustr

$$yx = \tfrac{1}{i}(hx - a')$$
$$= \tfrac{1}{n}a\left[\frac{nxy + x}{nxy - x}\right.$$
$$= a\left(\frac{nxy - y}{nxy + x} \cdot \frac{n}{n}\right.$$

Donc l'équation yx

$$a\left(\frac{nxy-y}{nxy+x} \cdot \frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}\right)$$

ou

$$nxy - y =$$

La formule précédente donne aussi $n = \frac{Ny+x+y}{Nxy}$.

119. Le dodécaèdre étant également susceptible d'être produit, comme forme secondaire, par le générateur et par le noyau hypothétique, nous pouvons déjà en conclure que ce dernier est lui-même forme secondaire relativement au générateur. Mais pour le prouver directement, concevons que les lignes $v\gamma$, $v\varepsilon$, $q\varepsilon$, γq, se meuvent parallèlement à elles-mêmes, en s'éloignant du centre, jusqu'à ce que le quadrilatère $adsg$ se trouve inscrit dans le quadrilatère $\gamma q\varepsilon v$, comme on le voit figure 76. S'il existe un décroissement admissible, en vertu duquel le générateur puisse produire le noyau hypothétique, on voit, à la seule inspection de la figure, que ce décroissement doit agir par renversement sur les angles inférieurs du générateur. Soit n' le nombre de rangées soustraites. Nous aurons cette série de rapports :

$$v\gamma' \text{ (fig. 74)} : v'\gamma :: v'\gamma' \text{ (fig. 76)} : \gamma'\gamma' :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{1}{4}a'$$
$$:: gu : u\gamma' :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \left(\tfrac{1}{3} + \frac{n'}{1-n'}\right)a ;$$

donc

$$g' : 2a' :: g : \frac{2n'+1}{1-n'}.a.$$

Mais en comparant les valeurs de g' et de a', que nous avons données plus haut (p. 447), on en conclura que

$$g' : 2a' :: g : 2a\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}\right);$$

ce qui indique
La figure 74
la diagonale obl
verge moins ave
teur. Nous verro
soit le contraire
même formule p
terminer la valeu

120. Il nous res
nent les incidenc
cèdre, aux endro
BX, etc. Si nous
seront les diagonal
noyau hypothétiqu
milieu de ces diagon
pendiculaires l'une

connues, il est facile, d'après les formules données plus haut, d'en déduire les expressions de g', p', N, et parce que $B\omega$ ou $C\lambda$ est égale à g', on pourra trouver les incidences cherchées, en considérant le dodécaèdre comme produit par un décroissement sur les bords inférieurs du noyau hypothétique, et en se servant des formules ordinaires relatives à cette espèce de décroissement (p. 324 et suiv.). Mais pour donner aussi une solution directe du même problème, nous allons chercher les expressions des rapports entre les sinus et les cosinus des angles du dodécaèdre, en fonctions de g, p, n, x, y.

Commençons par le rapport entre $B\omega$ et $\omega\mu$. Nous avons déjà $B\omega$ ou

$$g' = g \cdot \frac{x + nxy + y}{nxy + y};$$

donc tout se réduit à trouver la valeur de $\omega\mu$. Si nous menons $\gamma\delta$ (fig. 74) sur νx, elle sera le double de $\omega\mu$. Or, les triangles semblables $\gamma\delta x$, gux, donnent $gx : gu :: \gamma x : \gamma\delta$.

Mais

$$gx = \sqrt{(ux)^2 + (gu)^2} = \sqrt{(hr)^2 + (gu)^2},\ gu = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

$$hr = ax + \tfrac{1}{3}a = \frac{nxy + 2x + y}{3nxy + 3y - 3x} \cdot a;$$

donc

$$gx = \sqrt{\left(\frac{nxy + 2x + y}{3nxy + 3y - 3x}\right)^2 a^2 + \tfrac{4}{3}g^2},$$

$$\gamma x = a\left(\frac{nxy - y}{nxy + x} \cdot \frac{nxy + x + y}{nxy - x + y}\right).$$

Mettant à la place de gx, $g\omega$, et γx leurs valeurs, et prenant la valeur de $\frac{1}{2}\gamma\delta$, on a

$$\omega\mu = \tfrac{1}{2}a\,\frac{\left(\frac{2nxy-2y}{nxy+x}\cdot\frac{x+nxy+y}{nxy-x+y}\right)\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}}{\sqrt{\left(\frac{nxy+2x+y}{3nxy+3y-3x}\right)^2a^2+\tfrac{4}{3}g^2}}$$

Les valeurs de $B\omega$ et de [illegible] ant pour facteurs communs les quantités g et $\frac{x^{\frac{1}{2}-n}y+y}{+x}$, si l'on supprime celles-ci, on aura

$$B\omega : \omega\mu :: 1 : \tfrac{1}{2}a\cdot\frac{\frac{2nxy-2y}{nxy-x+y}\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\left(\frac{nxy+2x+y}{3nxy+3y-3x}\right)^2a^2+\frac{4}{3}g^2}}$$

$$:: \sqrt{\left(\frac{nxy+2x+y}{3nxy+3y-3x}\right)^2a^2+\tfrac{4}{3}g^2} : \tfrac{1}{2}a\cdot\frac{2nxy-2y}{nxy-x+y}\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

$$:: \sqrt{(nxy+2x+y)^2\tfrac{1}{3}a+(nxy+y-x)^2 4g^2}$$

$$: (nxy-y)\sqrt{a^2}.$$

Maintenant, pour avoir le rapport entre $C\lambda$ et $\lambda\vartheta$ (fig. 73), il suffit de trouver la valeur de $\lambda\vartheta$, parce que $C\lambda = B\omega$, dont nous connaissons déjà la valeur. $\lambda\vartheta$ (fig. 74) étant la même ligne que fig. 73, du point ε (fig. 74) menons $\varepsilon\zeta$ perpendiculaire sur $x\zeta$, et qui sera le double de $\lambda\vartheta$. Les triangles semblables pdr, $x\varepsilon\zeta$, donnent $dp : dr :: \varepsilon x : \varepsilon\zeta$; mais

$$dp = \sqrt{(pr)^2+(dr)^2},\quad dr = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2},\quad pr = ap+\tfrac{2}{3}a$$

$$= \frac{2nxy+x-y}{3nxy-3x+3y}a;$$

donc

$$dp=\sqrt{\left(\frac{2nxy+x-y}{3nxy-3x+3y}\right)^2 a^2+\frac{4}{3}g^2};$$

$$\epsilon x=a'+\gamma x=a.\frac{x+2y-nxy}{nxy+x}.\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}$$
$$+a.\frac{nxy-x}{nxy+x}.\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}$$
$$=a.\frac{x+y}{nxy+x}\times\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}.$$

Mettant à la place de dp, dr et ϵx leurs valeurs, et prenant la moitié de celle de $\epsilon\zeta$, on trouve

$$\tfrac{1}{2}\epsilon\zeta \text{ ou } \lambda\vartheta=a\frac{\left(\frac{x+y}{nxy+x}.\frac{nxy+x+y}{nxy-x+y}\right)\sqrt{\frac{1}{3}g^2}}{\sqrt{\left(\frac{2nxy+x-y}{3nxy-3x+3y}\right)^2 a^2+\frac{4}{3}g^2}}.$$

Comparant les valeurs de $C\lambda$ et de $\lambda\vartheta$ (fig. 73 et 74), et faisant attention qu'elles ont pour facteur commun la quantité $g\frac{nxy+x+y}{nxy+y}$, que l'on peut supprimer, on aura

$$C\lambda:\lambda\vartheta :: 1:a.\frac{\frac{x+y}{nxy-x+y}\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\left(\frac{2nxy+x-y}{3nxy-3x+3y}\right)^2 a^2+\frac{4}{3}g^2}}$$
$$:: \sqrt{\left(\frac{2nxy+x-y}{3nxy-3x+3y}\right)^2 a^2+\frac{4}{3}g^2}:\frac{x+y}{nxy-x+y}\sqrt{\frac{1}{3}a^2}$$
$$:: \sqrt{(2nxy+x-y)^2\tfrac{1}{3}a^2+(nxy-x+y)^2 4g^2}$$
$$:(x+y)\sqrt{a^2}.$$

(fig. 74) était pl
dans cet état, s
vienne à augmen
BX, etc. (fig. 73
tandis que les in
plus de saillie, et
les autres faisant
le dodécaèdre se t
mides droites réun
alors eh (fig. 77)=
ment $nxy+ax+y$

n

Ainsi, il y aura toujo
faire au cas dont il s'a

Si dans l'équation N

de n sa valeur $\frac{x+ay}{xy-}$

trouve N=

pyramides, a' s'évanouit; donc

$ex = \frac{0}{N-1}$; donc $(N-1)ex = 0$, ou $N-1 = 0$,

ce qui donne $N = 1$.

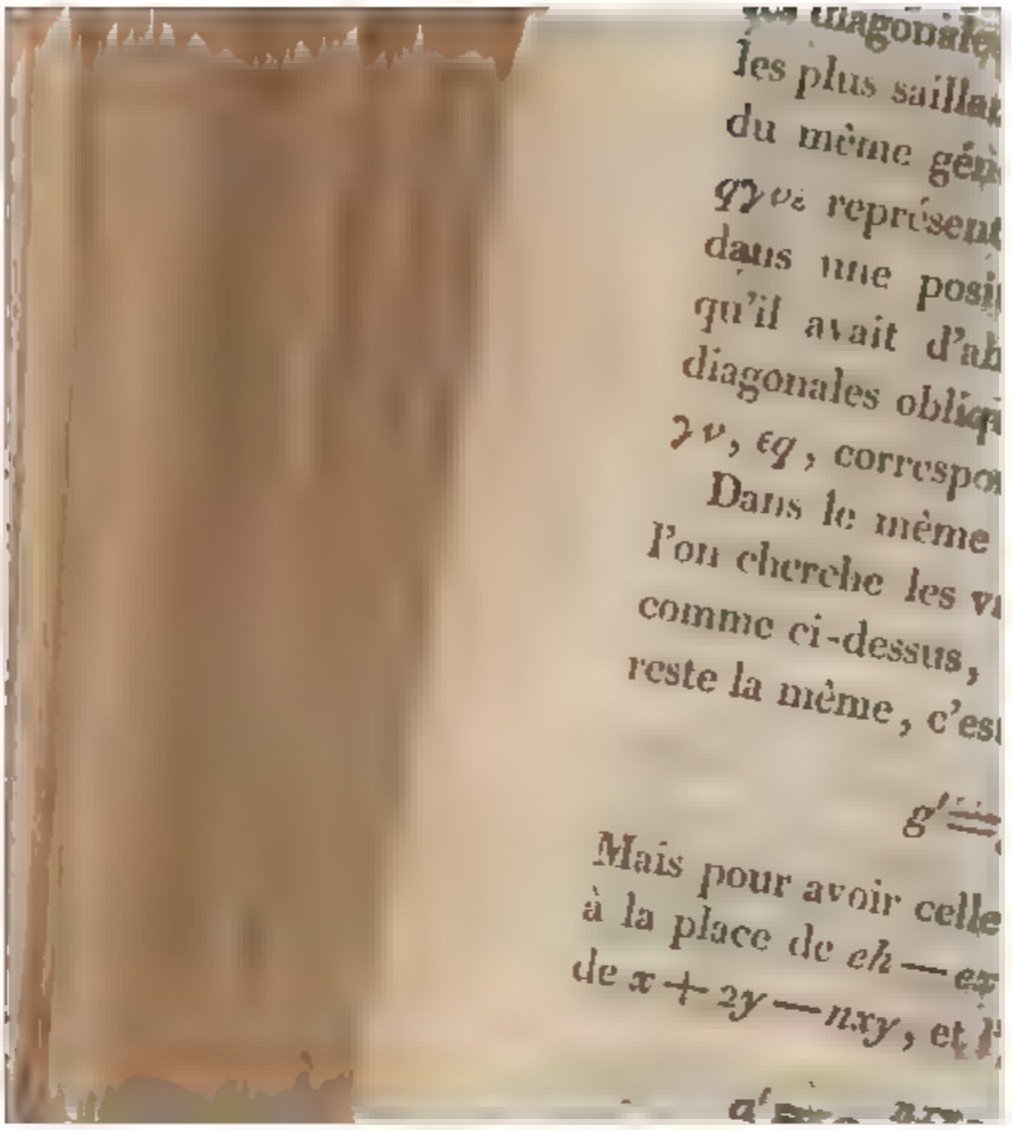
122. A mesure que le dodécaèdre approche du terme où il se trouve composé de deux pyramides droites, la diagonale oblique γv (fig. 74) du noyau hypothétique diverge de plus en plus avec l'axe, et il y a un point où elle devient parallèle à l'arête ag du générateur. Alors la quantité n' s'évanouit, c'est-à-dire que dans l'équation $n' = \frac{x+y-nxy}{2y}$ on a

$$x+y-nxy = 0, \text{ et } nxy = x+y;$$

d'où il suit que le cas dont il s'agit a lieu lorsque

$$n = \frac{x+y}{xy}.$$

Au-delà du même terme, la diagonale γv faisant avec l'axe un angle plus ouvert que l'arête ag, le décroissement en vertu duquel le générateur produirait le noyau hypothétique ne peut plus se faire sur l'angle e de ce générateur. Il a lieu par renversement sur l'angle A. Mais la formule $n' = \frac{x+y-nxy}{xy}$ ayant même propriété que celle qui a été donnée pour décroissemens ordinaires (p. 373), avertit d'abord changement, en donnant pour n' une quantité ve, et cette quantité prise avec un signe con- ésente i du décroissement.



les plus saillan
du même gén
qq^{es} représent
dans une posi
qu'il avait d'ab
diagonales obliq
$\gamma\nu$, ϵq, correspo
Dans le même
l'on cherche les v
comme ci-dessus,
reste la même, c'es

$$g' =$$

Mais pour avoir celle
à la place de $eh - ex$
de $x + 2y - nxy$, et

$$a' =$$

valeurs qui ne diffèrent des premières que par la substitution de $nxy - x - 2y$ à $x + 2y - nxy$, provenant de celle de $ex - eh$ à $eh - ex$, et qui dépend d'un simple changement dans les signes + et — des quantités du numérateur.

124. En procédant d'après la même substitution, relativement à la valeur de N, on aura $N = \frac{nxy - y}{x + y}$, quantité qui n'est autre chose qu'une inversion de celle à laquelle conduit la supposition de eh plus grande que ex. On tire de la même formule

$$n = \frac{Nx + Ny + y}{xy}.$$

Pour trouver n', on partira du rapport

$$qe : e\gamma \text{ (fig. 74)} :: \sqrt{\tfrac{1}{36}g'^2} : \tfrac{2}{3}\sqrt{a'^2};$$

mais d'une autre part, le décroissement qui donne le noyau hypothétique ayant lieu sur l'angle A du générateur, on aura

$$qe : e\gamma :: (n' + 1)\sqrt{\tfrac{1}{36}g^2} : \frac{2n' - 1}{3}\sqrt{a^2} \text{ (p. 311)};$$

donc

$$g' : 2\sqrt{a'^2} :: (n' + 1)g : (2n' - 1)\sqrt{a^2}.$$

Substituant aux rapports entre g' et g, et entre a' et a ceux de leurs valeurs algébriques, on aura

$$nxy + x + y : 2\left(\frac{nxy - x - 2y}{nxy + x}\right) :: (n' + 1)(nyx + x)$$

$$: (2n - 1)\frac{nyx - x + y}{nxy + x + y};$$

avons obte
+ en — et
Mais il n'
sinus et les e
caèdre, en s
CXQ, CXB,
moins inclinée
au cosinus

$$:: \sqrt{(nxy+2x+}$$

et que relativem
CXQ, qui maint
elles, le sinus sera

$$:: \sqrt{(2nxy+x-y)}$$

Je vais en donner la
ce dernier rapport.
du milieu o de la dia
sur l'arête

que varier dans sa direction et dans sa longueur. Donc les quantités dont est composé le rapport conservent leurs fonctions, en sorte que n change seulement de valeur. Le même raisonnement s'applique à la ligne $f'i$, menée du milieu de gs perpendiculairement sur le prolongement de xg, et considérée comme cosinus de l'inclinaison relative au premier rapport, dans lequel on a aussi pour sinus la demi-diagonale g du générateur.

125. Dans la construction représentée par la figure 74, le noyau hypothétique a ses demi-diagonales g' et p' dans un rapport différent de celui des demi-diagonales g et p du générateur. Or, à mesure que le dodécaèdre approche de l'état où il se trouve composé de deux pyramides droites, le rapport $g' : p'$ diffère de moins en moins du rapport $g : p$, en sorte qu'il y a un terme où les deux rapports deviennent égaux, c'est-à-dire qu'alors le noyau hypothétique est semblable au générateur. On a donc alors (p. 448)

$$g^2 : p^2 :: g^2 : \tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}\right)^2 + \tfrac{1}{36}g^2,$$

ou

$$p^2 = \tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}\right)^2 + \tfrac{1}{36}g^2;$$

d'où l'on tire

$$3p^2 - g^2 = \tfrac{1}{3}a^2\left(\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}\right)^2.$$

Mais

$$3p^2 - g^2 = \tfrac{1}{3}a^2;$$

donc

$$\frac{x+2y-nxy}{nxy-x+y}=1;$$

d'où l'on déduit

$$n=\frac{2x+y}{2xy}.$$

Ainsi, il y aura toujours une loi susceptible de remplir la condition propo

Connaissant la l e le dodécaèdre rapporté au noyau hypot , l est facile de trouver les valeurs numériques d , 2 et y dans la supposition présente. Car si l'o dère le noyau hypothétique comme faisant a son tour les fonctions de générateur, et celui-ci comme étant le noyau hypothétique, la loi qui le donne sera désignée par N, qui est censé connu, et celle qui donne le noyau hypothétique aura n pour exposant. Or, d'une part,

$$n=\frac{Ny+x+y}{Nxy},$$

à l'ordinaire (p. 449). Mais à cause de la similitude entre les deux noyaux, $n=\frac{2x+y}{2xy}$. Donc

$$\frac{Ny+x+y}{N}=\frac{2x+y}{2};$$

d'où l'on tire

$$x:y::N+2:2N-2.$$

Ayant trouvé les valeurs numériques de x et y, et les substituant dans l'équation $n=\frac{2x+y}{2xy}$, on aura l'expression numérique de n.

126. Supposons maintenant $eh = 2\,(ex)$. Dans ce cas, le solide secondaire sera un rhomboïde qui aura la ligne *qe* pour perpendiculaire sur l'axe. On aura donc $nxy + 2x + y = 2(2nxy + x - y)$ (*voyez* p. 446), d'où l'on tire $n = \frac{1}{x}$, expression qui aura toujours lieu, quelque valeur que l'on donne à y. Voici ce que signifie ce résultat. Soit *an* (fig. 79) un rhomboïde qui ait ses sommets en *a* et en *n*. Supposons un décroissement ordinaire par plus d'une rangée sur l'angle *bdf*, et soit *osr* un plan parallèle à la face qui en résultera. Ce décroissement en entraînera deux intermédiaires sur les angles *bdn*, *fdn*, des faces adjacentes; et il est facile de voir que si l'on considère, par exemple, celui qui a lieu sur l'angle *bdn*, on aura $do = x$, $ds = y$. De plus, le décroissement se fera en hauteur, de manière que *dr* représentera le nombre de rangées soustraites dans le même sens. Donc si l'on désigne par *n* la distance entre *d* et *os*, on aura $n = \frac{1}{dr}$. Mais $dr = do = x$; donc $n = \frac{1}{x}$, ce qui aura toujours lieu, quelle que soit la valeur de *ds* ou de y. Le cas dont il s'agit ici se rapporte donc implicitement à l'effet d'un décroissement ordinaire, dans lequel le décroissement intermédiaire agit subsidiairement.

Si l'on fait $x = 2$, on aura $n = \frac{1}{2}$. Supposons de plus $y = 1$. On trouve dans ce cas

$$ap \text{ (fig. 74)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2} \text{ (p. 445)},$$

que l'on concèv
le décroissemen
gées, on a (fig.
ou $\frac{1}{dr} = \frac{1}{i} = \frac{1}{x}$. A
qu'elle égale l'un

127. Pour faire
par la variété de
paradoxale, et qu
est $(E''EB'D^a)\dot{D}E''$
étant celles qui so
intermédiaire, les
décaèdre métastatiq
inverse.

On a donc, dans l
La quantité n étant i

faces du générateur, comme dans la figure 73, où, ce qui revient au même, *eh* est plus grande que *ex* (fig. 74).

Si l'on cherche, d'après les données précédentes, le rapport entre les demi-diagonales g', p', du noyau hypothétique, on trouvera (p. 448) $g' : p' \sqrt{3} : \sqrt{15}$, d'où l'on conclura que ce noyau est semblable au rhomboïde inverse. Dans le même cas, la formule $N = \frac{x+y}{nxy-y}$ (p. 448) donne $N = 3$, d'où il suit que le dodécaèdre est susceptible d'être produit en vertu d'un décroissement par trois rangées sur les bords inférieurs du noyau hypothétique.

De plus, la formule $n' = \frac{x+y-nxy}{2y}$ donne $n' = \frac{1}{2}$, ce qui fait connaître que le noyau hypothétique peut résulter d'un décroissement par une rangée sur les angles inférieurs du générateur; et telle est effectivement la loi qui convient au rhomboïde inverse.

Si dans le rapport de $B\omega$ à $\omega\mu$ (p. 452) on substitue les valeurs de x, y, a, g, on trouve

$$B\omega : \alpha\mu :: \sqrt{53} : \sqrt{3},$$

ce qui donne pour l'incidence de CXB sur CXQ (fig. 73) 153d 13′ 58″; et si l'on fait les mêmes substitutions dans le rapport de $C\lambda$ à $\lambda\vartheta$ (p. 453), on trouve $C\lambda : \lambda\vartheta :: \sqrt{29} : \sqrt{27}$, ce qui donne 92d 3′ 10″ pour l'incidence de CXQ sur NXQ.

Il est remarquable que les plus longs bords des

faces r, r (fig. 80), qui appartiennent au métastatique soient parallèles entre eux. Cette propriété dépend de ce que l'arête o, qui est parallèle à qr (fig. 74), a la même inclinaison que l'arête dp (fig. 6, pl. 16) qui lui correspond sur le métastatique. Car on a, dans ce dernier cas, $ap=a=3$, et $ar=\frac{2}{3}a=2$. Donc $pr=5$. De plus, $=\sqrt{\frac{4}{3}g^2}=\sqrt{\frac{4}{3}.3}=2$; donc $dp:pr::2:5$. Maintenant, dans la fig. 74, on a aussi

$$dr=2,\ ar=2,\ ap=\frac{x-1}{nxy-x+y}.a\,(\text{p. }445)=3.$$

Donc aussi $pr=5$, ce qui conduit au parallélisme dont j'ai parlé.

128. Si l'on observe attentivement la forme de la variété qui nous occupe, on trouve que la substitution d'un noyau hypothétique au générateur, est en quelque sorte aidée par l'aspect des facettes f, f, qui sont celles d'un rhomboïde semblable à ce noyau. Mais, d'une autre part, les facettes r, r, appartiennent au métastatique, et leurs arêtes inférieures l, l, sont dans le sens des arêtes latérales du générateur. Le cristal porte donc l'empreinte de deux noyaux, l'un réel, l'autre hypothétique, relatifs aux deux dodécaèdres; et quoique la cristallisation n'ait travaillé que sur le premier noyau, elle se prête, relativement au second, à un résultat idéal, plus simple que celui qui a lieu en effet, puisqu'il dépend d'une des lois les plus ordinaires, tandis que l'autre sup-

pose une loi intermédiaire. C'est de cette sorte de résultat inattendu, ou de *paradoxe* qu'offre la variété dont il s'agit, que dérive le nom de *paradoxale* que je lui ai donné. Cette variété a été trouvée par M. Tonnellier, dans une carrière de craie située à l'extrémité des faubourgs de Saint-Julien-du-Sault, département de l'Yonne.

129. Une autre variété que j'ai nommée *chaux carbonatée numérique*, et dont on voit la projection figure 81. a pour signe $\breve{E}^{\frac{5}{6}}\,\breve{E}^{\frac{5}{6}}\,B^1D^1$ (1). En appliquant ici les formules qui ont été données précédemment, et en faisant attention que l'exposant $\frac{5}{6}$ de E, plus petit que $\frac{5}{3}$ qui convient au cas de la double pyramide droite (p. 462) indique que le dodécaèdre tourne ses arêtes les plus saillantes vers les faces du générateur, on trouvera que le rapport $g' : p'$ des demi-diagonales du noyau hypothétique est celui de $\sqrt{12}$ à $\sqrt{5}$, d'où il suit que ce noyau est semblable au rhomboïde équiaxe. On trouvera de plus $N = \frac{5}{3}$; et quand à la valeur de n' ou de $\frac{x+y-nxy}{2y}$, elle devient $\frac{0}{6}$, quantité infiniment petite qui fait

(1) Le nom de *numérique* est tiré des propriétés de nombres que présente ce signe, dans lequel la somme 2 plus 3 des exposans de B et de D est égale au numérateur 5 de l'exposant de E, et leur produit est égal au dénominateur 6 du même exposant. J'ai déjà fait connaître cette variété sous un autre rapport, p. 344.

connaître que les faces du noyau hypothétique sont parallèles aux arêtes *ag*, *ds* (fig. 74) du générateur. C'est effectivement ce qui a lieu dans l'équiaxe. On aura enfin pour l'incidence de γ sur γ', 115^d 1′ 4″, et pour celle de γ sur γ'', 142^d 24′ 6″. M. Mabru, minéralogiste très instruit, qui a découvert la variété dont il s'agit près de Clermont-Ferrand, département du Puy-de-Dôme, avait très bien remarqué qu'elle présentait l'aspect du rhomboïde équiaxe, dont les six bords inférieurs seraient remplacés par autant de biseaux.

130. La variété qui va maintenant nous occuper offre un résultat que j'avais donné comme purement hypothétique, dans la première édition de mon Traité (1), n'ayant vu jusqu'alors aucun cristal qui le réalisât. Il consistait dans la possibilité que la forme du dodécaèdre métastatique fût l'effet d'une loi intermédiaire de décroissement, que j'avais déterminée. Ce résultat s'est présenté depuis à mon observation dans des cristaux dont on voit la projection (fig. 82). Les faces $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}$, qui appartiennent au dodécaèdre dont je viens de parler s'y combinent avec celles du rhomboïde inverse, savoir, f, f, et avec les pans c, c' du prisme hexaèdre régulier. Le signe est $\left(\overset{\frac{5}{4}}{\underset{\mathfrak{d}}{E}}\ \overset{\frac{5}{4}}{B^1}D^a\right)\underset{f}{E^{\frac{1}{2}}}\underset{c}{E^a}$.

Le métastatique ordinaire tourne ses arêtes les

(1) Tome II, page 35.

moins saillantes vers les faces du générateur, tandis que ce sont au contraire les plus saillantes qui ont cette position dans le dodécaèdre produit par une loi intermédiaire. D'une autre part, le rhomboïde inverse ordinaire a ses faces tournées vers les bords supérieurs du noyau. Mais il y a une loi, savoir, celle dont l'expression est $\overset{5}{e}$, susceptible de donner le même rhomboïde, avec la condition que ses faces correspondent à celles du noyau. Il suit de là que l'aspect du cristal qui nous occupe peut également résulter de la combinaison des lois indiquées par le signe donné ci-dessus, ou de celles qui le sont par cet autre signe $\overset{\mathfrak{d}}{\overset{5}{D}}\overset{4}{ee}$. La division mécanique fait disparaître l'ambiguité, en prouvant que c'est le premier cas qui a lieu. De là le nom de *chaux carbonatée ambiguë* que j'ai donné à la variété dont il s'agit.

Les formules de la page 460 fournissent un moyen simple pour trouver les exposans de la quantité qui, dans le signe, représente les faces $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}$, d'après la condition que le cristal secondaire soit semblable au dodécaèdre métastatique : car alors on a N=2; donc la proportion $x:y :: N+2 : 2N-2$, devient $x:y :: 2:1$. Faisant $x=2$ et $y=1$, dans l'équation $n=\frac{2x+y}{2xy}$, on trouve $n=\frac{5}{4}$, comme dans le signe.

131. J'ai fait connaître (p. 355) une variété de corindon que je nomme *ternaire*, et dont la forme, qui est celle d'un dodécaèdre composé de deux pyra-

mides droites, résulte du décroissement $E^{n}E$. Le corindon nous offre d'autres dodécaèdres du même genre, produits par des lois intermédiaires sur les angles E. L'un d'eux, dont on voit la projection figure 83, et que j'appelle *corindon assorti*, a pour signe $(E^{n}\underset{h}{E}D^{a}B')$. Dans le cas présent on a $x=2$, $y=1$, si dans la formule $n=\frac{x+2y}{xy}$ relative au décroissement qui produit la double pyramide droite hexaèdre (p. 454), on met à la place de x et de y leurs valeurs numériques, on trouve $n=2$, comme l'indique le signe. Substituant les mêmes valeurs et celle de n dans le rapport de dr à pr (fig. 74), qui est celui de $\sqrt{\frac{4}{3}g^{2}}$ à $\frac{2n.xy+x-y}{3(nxy-x+y)}.a$, on trouve

$$dr:pr::\sqrt{\tfrac{4}{3}g^{2}}:a,$$

ce qui fournit un moyen simple pour déterminer les incidences respectives des faces du dodécaèdre.

Soit *syrz* (fig. 84) la pyramide supérieure, c étant le centre de la base, et sc la hauteur. Menons le rayon cr, ensuite co perpendiculaire sur tr, puis os. Nous aurons

$cr:cs::dp:pr$ (fig. 74) $::\sqrt{\frac{4}{3}g^{2}}:a$; donc $co:cs::g:a$.

Or, dans le corindon, $g=\sqrt{15}$, $p=\sqrt{17}$; donc $a=\sqrt{108}$; donc $co:cs::\sqrt{15}:\sqrt{108}::\sqrt{5}:6$.

D'après ces données, on trouve pour l'incidence

de *h* sur *h* (fig. 83) 124d 6′, et pour celle de *h* sur *h′* 139d 6′ (1).

132. Une seconde variété, qui est représentée figure 85, réunit les faces *r*, *r* de l'uniternaire avec celles d'un dodécaèdre produit par une loi intermédiaire différente de la précédente, en sorte que le signe du cristal est $(E^{\frac{7}{5}}\,{}_{l}^{,}\,{}^{5}ED^{5}B^{1})E^{33}{}_{r}E$. Si nous supposons que *syrtz* (fig. 84) soit encore une des pyramides qui résulte du décroissement intermédiaire, et si dans le rapport $\sqrt{\frac{4}{3}g^2} : \frac{2nxy+x-y}{(3nxy-x-y)}.a$ ou $dp : pr$ nous faisons $x=5$, $y=1$, $n=\frac{7}{5}$, nous aurons

$dp : pr :: \sqrt{\frac{4}{3}g^2} : 2a :: cr : cs$; donc $co : cs :: g : 2a$,

rapport double de celui qui donne la variété décrite précédemment. En faisant usage de ces données, on trouve 121d 6′ pour l'incidence de *l* sur *l*, et 158d 52′ pour celle de *l* sur *l′*. Quant à celle de *r* sur *l*, on la trouvera de 161d 21′, d'après les mesures indiquées (p. 355), pour la variété ternaire.

On voit ici que la loi intermédiaire qui donne les faces *l*, *l*, et qui pourrait paraître peu admissible par

---

(1) Le nom de *corindon assorti* que j'ai donné à cette variété est tiré de ce qu'elle offre l'accord ou l'assortiment d'une loi de décroissement qui est une des plus simples de ce genre, avec un rapport également simple entre les dimensions de la pyramide, prises dans le sens horizontal et dans le sens vertical.

sa complication, dépend d'un rapport très simple, pris dans les dimensions du noyau, savoir, $g:2a$. Il arrive assez souvent que ces lois qui, considérées en elles-mêmes, sembleraient propres à faire naître des préjugés contre la théorie, ont un côté qui les ramène à l'analogie des résultats ordinaires qui, en général, sont remarquables par leur simplicité.

133. Il arrive souvent que la combinaison des faces qui résultent d'un décroissement intermédiaire, avec d'autres faces produites par des décroissemens ordinaires, imprime à la forme qui en dérive des caractères de symétrie dont on peut tirer avantage pour simplifier et pour abréger les calculs. C'est ce qui a lieu en particulier dans la variété paradoxale (fig. 80), et je vais faire voir comment son aspect géométrique suffit seul pour fournir des données à l'aide desquelles on arrive, sans aucun tâtonnement, à la détermination du décroissement intermédiaire qu'elle présente.

Supposons que l'on ait reconnu que les faces f, f appartiennent au rhomboïde inverse, et les faces r, r au dodécaèdre métastatique. En observant attentivement ces deux ordres de faces, on s'apercevra d'abord que les arêtes inférieures des premières sont si sensiblement parallèles aux arêtes h, h du dodécaèdre dû au decroissement intermédiaire, que l'on est fondé à en conclure que le parallélisme est rigoureux. Il en résulte que le rhomboïde inverse est le noyau hypothétique du dodécaèdre dont il s'agit.

De plus, on s'apercevra du même parallélisme entre les longs bords des faces r, r, d'où il suit que les arêtes qu'elles remplacent sur le dodécaèdre sont inclinées à l'axe de la même quantité que celles qui, sur le métastatique, séparent les faces r, r, et qui sont les moins saillantes parmi les six contiguës à un même sommet.

Cela posé, il est d'abord facile de trouver la valeur de N. Car *adsg* (fig. 86) étant toujours la section principale du véritable noyau, soient dk, dl, les arêtes du métastatique qui ont l'angle d pour point commun. Désignant l'angle *as* par 3, nous aurons

$dr = 2$, $ar = 2$, $ak = 3$; donc $dr : rk :: 2 : 5$,

lequel rapport est aussi celui de qe à ex (fig. 74). Soit $qe = 2$; dans la coupe principale $q\gamma v\epsilon$ du noyau hypothétique, nous aurons $e\gamma = qe = 2$; donc $\gamma x = 3$. Mais $\gamma\epsilon = 6$; donc l'équation $\gamma x = \frac{a'}{N-1}$ devient

$$3 = \frac{6}{N-1}, \text{ d'où l'on tire } N = 3.$$

133. On peut, au moyen des formules ordinaires relatives aux décroissemens sur les arêtes D, vérifier tout de suite la justesse des données prises dans l'aspect géométrique du dodécaèdre dont il s'agit ici. Mais il restera à connaître la loi intermédiaire dont il dérive; et pour y parvenir il suffira de chercher le rapport entre x et γ, parce que ce rapport étant donné on aura la valeur de n, à l'aide de la for-

Soient *asb*, *g*
CXQ (fig. 73),
(fig. 87), et par
ensuite *bc* perpe
aussi perpendicul
serons, pour plus
cide avec le point
(fig. 74). Je prolo
soit égale à *qe* (fig.
ensuite je fais passer
rallèle à la face *audb*
je mène *ox*, et par
mène *br*.

Cherchons d'abord
nous prolongeons *qe* (
de l'arête *vx*, le prolo
entre le point *e* de l'axe
moins saillan

lantes. Or, qe (fig. 74) ou son égale

$$ey' : el :: y'x : ex :: \tfrac{1}{3}a' + \frac{1}{N-1}a' : \tfrac{1}{3}a' + \frac{1}{N-1}a' :: 2N-1 . N+2,$$

Donc aussi,

$$bf\,(\text{fig. } 87) : af :: 2N+1 : N+2.$$

134. Maintenant nous avons à déterminer le rapport entre br et or, dont l'une est dans le sens de la diagonale oblique du noyau, et l'autre est parallèle à la diagonale horizontale. Cherchons d'abord br. Soit $bf = 2N+1$; on aura $af = N+2$, et à cause de l'angle $acf = 60^d$,

$$cf = \tfrac{1}{2}af = \frac{N+2}{2},\quad bc = bf - cf = 2N+1 - \frac{(N+2)}{2} = \frac{3N}{2},$$

$$bc : cs :: qe\,(\text{fig. } 74) : ex :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{1}{3}a' + \frac{1}{N-1}a'$$
$$:: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \frac{N+2}{3N-3}a'.$$

Mettant à la place de bc sa valeur $\frac{3N}{2}$, on trouvera

$$cs = \frac{N^2+2N}{4N-4} \cdot \frac{a'}{g'}\sqrt{3}.$$

D'une autre part

$$bc : or :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} : \tfrac{1}{3}a :: g : a\sqrt{\tfrac{1}{3}};\ \text{ou}\ \frac{3N}{2} : or :: g : a\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Donc
$$or = \frac{3N}{2} \cdot \frac{a}{g}\sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

$$br = \sqrt{(bc)^2 + (cr)^2} = \sqrt{\frac{9N^2}{4} + \frac{9N^2}{4}\cdot\frac{a^2}{3g^2}} = \sqrt{\frac{9N^2}{4}\left(\frac{3g^2+a^2}{3g^2}\right)};$$

et mettant à la place de a^2 sa valeur $3p^2 - 3g^2$,

$$br = \sqrt{\frac{9N^2}{4} \cdot \frac{3p^2}{g^2}}.$$

Reste à chercher or, au moyen de la proportion

$$or : rs :: ac : cs.$$

1°. Pour rs; nous aurons

$$rs = cs - cr = \frac{N^2 + 2N}{4N - 4} \cdot \frac{a'}{g'} \sqrt{3} - \frac{3N}{2} \cdot \frac{a}{g} \sqrt{\frac{1}{3}}$$

2°. Pour ac; nous aurons

$$ac = cf\sqrt{3} = \frac{N+2}{2}\sqrt{3}.$$

3°. Nous avons déjà eu

$$cs = \frac{N^2 + 2N}{4N - 4} \cdot \frac{a'}{g'} \sqrt{3}.$$

Si nous substituons ces valeurs dans la proportion précédente, elle devient

$$or : \frac{N^2+2N}{4N-4} \cdot \frac{a'}{g'}\sqrt{3} - \frac{3N}{2} \cdot \frac{a}{g}\sqrt{\frac{1}{3}} :: \frac{N+2}{2}\sqrt{3} : \frac{N^2+2N}{4N-4} \cdot \frac{a'}{g'}\sqrt{3},$$

ou

$$or : \left[(N+2)\frac{a'}{g'} - (2N-2)\frac{a}{g}\right]\sqrt{3} :: 1 : \frac{2a'}{g'};$$

d'où l'on tire

$$or = \left[(N+2)\frac{a'}{g'} - (2N-2)\frac{a}{g}\right]\frac{g}{2a'}\sqrt{3}.$$

Supprimant dans les expressions de *br* et de *or* le facteur commun $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, on aura

$$br : or :: \frac{3Np}{g} : \left[(N+2)\frac{a'}{g'} - (2N-2)\frac{a}{g}\right]\frac{g'}{a'}$$
$$:: \frac{3Np}{g} : N+2-(2N-2)\frac{ag'}{a'g}.$$

Supposons $g' = g$, et soit m le nombre qui, dans cette hypothèse, exprime le rapport entre a' et a, en sorte que l'on ait $a' = ma$. La proportion précédente deviendra

$$br : or :: \frac{3Np}{g} : N+2-(2N-2)\frac{1}{m} :: 3Np : (N+2)g - 2(N-2)\frac{g}{m}$$
$$:: 3Nmp : (N+2)gm - (2N-2)g,$$

et faisant les multiplications indiquées, puis réduisant,

$$br : or :: 3Nmp(Nm + 2m - 2N + 2)g.$$

Il reste maintenant à prouver que x est à y comme la somme des coëfficiens de p et de g est à leur différence.

Soit *obz* (fig. 88) le même triangle que figure 87, et *biku* (fig. 88) le rhombe dont ce triangle fait partie. Soit *hl* le bord situé vers l'angle *i* de la première lame de superposition, lequel sera parallèle à *bo*. x et y seront en même temps les nombres d'arêtes de molécule contenues dans *hi* et *il*. Soient X et Y ceux que renferment *bi* et *io*. Soit de plus s le nombre de fois que la demi-diagonale oblique p'' de

donc $s = X +$

nombres d'arêt

sont proportio

$s : t :: x+y :$.

donc $sp'' : tg'' ::$

parce que les dia

tionnelles à celle

$$x+y : x-$$

Si dans la prop

le second terme d

aura

$$2x : x-y :: s+t:$$

Si dans cette nou

second terme de c

devient

$$2x : 2y :: s+t : s$$

c'est-à-dire que

Maintenant, dans la variété paradoxale, $N=3$, $g=\sqrt{3}$, $a=3$, et si l'on fait $g'=g=\sqrt{3}$, on aura

$$p'=\sqrt{5},\ a'=\sqrt{9p'^2-3g'^2}=\sqrt{45-9}=6=2a;$$

d'où il suit que $m=2$. Substituant à la place de N et de m leurs valeurs, dans la proportion précédente, on trouve $x:y::2:1$. Donc on peut faire $x=2$, $y=1$. Reprenant la formule $n=\frac{Ny+x+y}{Nxy}$, et mettant à la place de N, x, y, leurs valeurs, on aura $n=\frac{6}{6}=1$.

135. Lorsqu'un des décroissemens qui ont lieu sur les angles E donne la double pyramide droite, le noyau hypothétique devient le prisme hexaèdre régulier. L'hypothèse la plus simple est celle dans laquelle le rapport entre la perpendiculaire menée du centre de la base du prisme sur un des côtés, et la hauteur du même prisme est égal à celui qui a lieu entre la demi-perpendiculaire $\sqrt{\frac{1}{3}g^2}$ sur l'axe du rhomboïde et la longueur de cet axe (1). Dans ce cas, le décroissement ordinaire relatif au prisme hexaèdre étant donné, il est bien facile d'avoir la loi du décroissement intermédiaire qui lui correspond dans le rhomboïde. Je supposerai toujours que x soit dans le sens de D, et y dans le sens de B.

---

(1) Le prisme alors est censé résulter d'un décroissement [illegible] rangée [illegible] bords D du rhomboïde.

Soient *asg*, *hsg* (fig. 89), deux faces contiguës sur la pyramide, limitées par le plan vertical *ash*, et par le plan horizontal *agh*, et soit *mgl* un plan qui coïncide avec la face du noyau qui regarde l'arête *gs*. Je mène *ah*, ensuite *so* perpendiculaire sur *ah*, puis *ok* perpendiculaire sur *gh*, et enfin *sk* et *gn*.

Le triangle *kos* pourra être regardé comme mensurateur, relativement au décroissement qui en agissant sur le bord de la base du prisme alligue comme *gh*, donne la face *gsh*.

Soit $go = \sqrt{\frac{1}{3}g^2}$. Nous aurons

$on = \frac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}$, $gn = p$, $ao : go$ ou $\sqrt{\frac{1}{3}g^2} :: \sqrt{3} : 1$, $ao = g$.

Soit z l'exposant du décroissement relatif à la face *gsh*, considéré dans le sens de la largeur. $go = \sqrt{\frac{1}{3}g^2}$. *ok* sera $= \frac{1}{2z}g$. Mais dans l'hypothèse où *ok* égalerait g et *go* serait $\sqrt{\frac{1}{3}g^2}$, la hauteur du prisme aurait pour expression $\sqrt{9p^2 - 3g^2}$. Donc, si nous supposons comme ici $ok = \frac{1}{2g}$, la hauteur sera exprimée par $\frac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2}$; donc $os = \frac{1}{2z}\sqrt{9p^2 - 3g^2}$;

$$ns = os - on = \frac{1}{2z}\sqrt{9p^2 - 3g^2} - \frac{1}{3}\sqrt{9p^2 - 3g^2},$$

$$= \left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{3}\right)\sqrt{9p^2 - 3g^2} = \frac{3 - 2z}{6z}\sqrt{9p^2 - 3g^2}.$$ Or,

$ns : mn :: os : ao$, ou $\frac{3 - 2z}{6z}\sqrt{9p^2 - 3g^2} : mn$

$$:: \frac{1}{2z}\sqrt{9p^2 - 3g^2} : g.$$

d'où l'on tire

$$mn = \frac{3-2z}{3} \cdot g,$$

donc

$$gn : mn :: p : \frac{3-2z}{3} \cdot g :: 3p : (3-2z)g.$$

Or, d'après ce qui a été dit ailleurs, $x : y$ comme la somme des facteurs de p et de g est à leur différence,

$$:: 3+3-2z : 3-3+2z :: 6-2z : 2z :: 3-z : z.$$

Ayant le rapport entre x et y, on aura le nombre de rangées soustraites par la formule $n = \frac{x+2y}{xy}$.

136. Choisissons pour exemple le corindon, et supposons que la pyramide résulte du décroissement $\dot{B}$. On aura $z = 1$;

$$x : y :: 3-1 : 1 :: 2 : 1, \; n = \frac{2+2}{2} = 2.$$

Donc le signe du décroissement intermédiaire sera ($E^{2}ED^{2}B^{1}$). C'est le corindon assorti.

Supposons que le décroissement rapporté au prisme soit $\dot{\frac{1}{5}}B$. On aura

$$z = \tfrac{1}{5} \text{ et } x : y :: 3-z : z :: 3-\tfrac{1}{5} : \tfrac{1}{5} :: 6 : 1, \; n = \frac{5+2}{5} = \tfrac{7}{5}.$$

Donc le signe du décroissement intermédiaire sera ($E^{\frac{7}{5}\frac{7}{5}}ED^{5}B^{1}$). Ce signe appartient à douze des faces du corindon di-dodécaèdre.

Supposons pour le prisme $\dot{\frac{3}{5}}B$. On aura

$$z = \tfrac{3}{5}, \; x : y :: 3-\tfrac{3}{5} : \tfrac{3}{5} :: 6-3 : 3 :: 1 : 1 ;$$

c'est-à-dire que le décroissement devient ordin
Et comme $n=3$, il a lieu par 3 rangées, parce qu'
exprime le nombre de rangées soustraites, et no
le nombre de diagonales soustraites.

Passé ce terme, le problème appartient à une a
hypothèse dans laquelle x est dans le sens de B
dans le sens de D.

II. *Décroissemens intermédiaires sur les angles*
x *étant dans le sens de* B, *et* y *dans le sens de* D.

137. Soit *abdu* (fig. 90) la même face du géné
teur que celle qui est représentée figure 72. L
lignes $\gamma\lambda$, $\pi\zeta$ (fig. 90), parallèles aux bords produ
par le décroissement, seront nécessairement tourn
en sens contraire de celui qui a lieu dans la figure 7
$b\lambda$ et πu (fig. 90), ou x, x, qui sont dans le s
de B, B, étant plus grandes que $b\gamma$, $u\zeta$ ou y, y,
sont dans le sens D, D. Il en résulte que dans le d
décaèdre HX (fig. 91) à triangles scalènes qui
l'effet du décroissement, les arêtes XQ, XB, etc
qui correspondent aux faces du générateur, diverge
avec ses diagonales obliques, en allant du sommet
vers les parties inférieures, au lieu que c'est l'inver
dans le cas représenté (fig. 73). La figure 92 devan
être alors substituée à la figure 74, on voit, en la
comparant, que les arêtes situ[illegible]mme xv, hy
(fig. 92), passeront encore pa[illegible]es d[illegible]
générateur, et que les arêtes
aussi à une certaine distance au-

obliques *ad*, *gs*. Mais la ligne *al* parallèle à *xq* part du sommet, et non plus de l'angle *d*, comme dans la figure 74, en sorte que *ap* et *aγ* disparaissent, et que la dernière se trouve remplacée par le décroissement *dl* (fig. 92) de l'arête *sd*. Quant à la ligne *av*, elle sera la même que figure 74.

Soit *at* (fig. 92) le prolongement de *ga* jusqu'à la rencontre de *qx*, les trois lignes *dl*, *av* et *at* seront celles qui, dans le calcul relatif au cas présent, font l'office des lignes *aγ*, *av* et *ap* (fig. 74), employées à la détermination du dodécaèdre précédent.

La différence entre les deux cas dépend des positions de *x* et de *y* qui sont inverses l'une de l'autre. La plupart des résultats portent l'empreinte de cette différence, en sorte que si l'on met *x* à la place de *y*, et réciproquement dans ceux qui se rapportent au premier cas, on a les formules relatives au second. Il faut en excepter la valeur de *ay* (fig. 74), qui se change en celle de λϑ (fig. 91), sans aucune substitution, ainsi que la valeur de *g'* ou de *qe* (fig. 74 et 92), qui n'offre la différence dont il s'agit que dans le dénominateur de la fraction représentative de cette valeur, ce qui n'empêche pas que le rapport de *g'* à *p'* ne participe, sans aucune restriction, à la différence dont j'ai parlé.

138. La marche du calcul étant presque la même dans les deux cas, je me bornerai à indiquer en général celle qui se rapporte au dodécaèdre que nous

ons ici, et je ne la développerai que d
ù elle diffère de la précédente.

le triangle mensurateur *akf* (fig. 92)
dkf (fig. 74), on aura toujours

$$kf = \sqrt{g'^2+p'^2},$$

et si l'on nent à la figure 90 tou
qui a été (p. 441), on trouve

$$ak = \frac{gnxy}{x-y} : \sqrt{g^2+p^2},$$

et parce que $ak : \kappa j \ldots\ldots : dl$, on aura

$$dl = \frac{x-y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2},$$

expression qui doit être la même que celle de
ainsi qu'il est facile de le concevoir, avec un p
d'attention.

Pour avoir le prolongement av de da, on subs
tuera la figure 93 à la figure 75. La seule différen
entre les expressions des lignes tracées sur ces de
figures consiste en ce que bm qui était $nx\sqrt{g'^2+}$,
devient $ny\sqrt{g'^2+p'^2}$; et quant à by, elle sera to
jours $\sqrt{g'^2+p'^2}$. D'après les substitutions ind
quées, le même calcul donne $av = \frac{2py}{nxy+x}$, au li
de $av = \frac{2px}{nxy+y}$, conformément à ce qui a été a
noncé ci-dessus (p. 481).

L'expression de ax sera $\frac{y}{nxy+x-y}.a.$

Pour trouver celle de at, on prendra les triangles semblables xta, als, qui donnent $ax : at :: as : ls$.

Or,

$$ls = ds + dl = \left(1 + \frac{x-y}{nxy}\right)\sqrt{g^2+p^2} = \frac{nxy+x-y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2};$$

donc

$$\frac{y}{nxy+x-y}.a : at :: a : \frac{nxy+x-y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2};$$

d'où l'on déduit

$$at = \frac{1}{nx}\sqrt{g^2+p^2}.$$

139. Pour appliquer les données précédentes, il s'agit d'abord de chercher les expressions de g' et de p'. On aura comme ci-dessus $dr : hr :: qe : eh$. Mais à la place de la proportion $dr : pr :: qe : ev$, dont les deux premiers termes n'existent pas dans le cas présent, on prendra $lz : az :: qe : ex$. De plus

$$lz : ls :: dr : ds,$$

ou

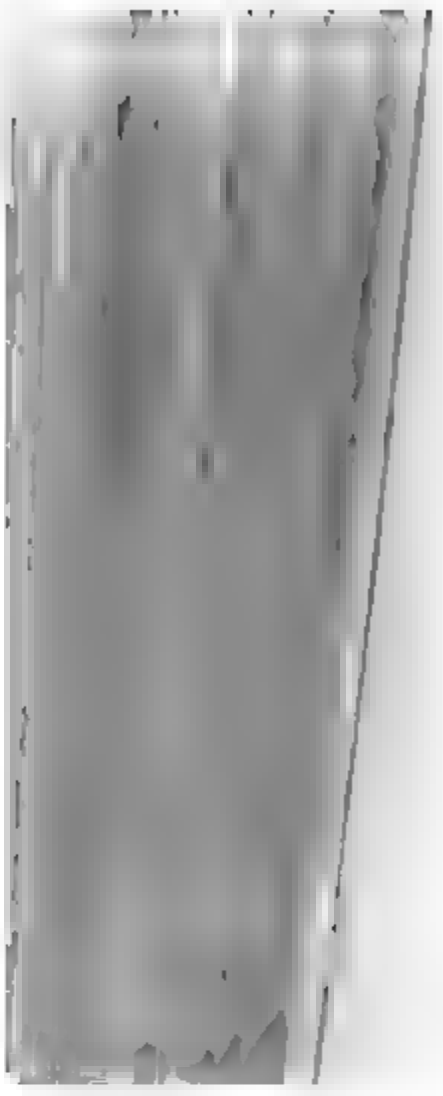
$$lz : \frac{nxy+x-y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2} :: dr : \sqrt{g^2+p^2};$$

donc

$$lz = \frac{nxy+x-y}{nxy} \times dr;$$

donc la proportion $lz : az :: qe : ex$, peut être mise sous cette forme

$$\frac{nxy+x-y}{nxy} \times dr : az :: qe : ex, \text{ ou } dr : \frac{nxy}{nxy+x-y} \times az :: qe : ex.$$



$$hr = ax + \tfrac{1}{3}a:$$

$$az = as - sz,$$

donc

donc

$$ax = a - \left(\frac{n}{}\right.$$

donc la propor

devient

$$eh : ex :: a\left(\frac{nxy+x}{3nxy+3}\right.$$

ou

$$eh : ex :: nxy$$

140. Il n'y a rien à changer dans la marche du calcul qui donne l'expression de N. On trouvera

$$N=\frac{x+y}{nxy-x}, \text{ d'où l'on tire } n=\frac{Nx+x+y}{Nxy}.$$

A l'égard de n', on observera que le décroissement qui s'y rapporte agit ici comme dans le premier cas par renversement sur les angles inférieurs du générateur. On aura donc encore $g' : g :: 2a' : \frac{2n'+1}{1-n'}a$. Et en poursuivant comme ci-dessus (p. 449) on trouvera $n'=\frac{x+y-nxy}{2x}$.

Même manière d'opérer pour avoir la plus grande incidence des faces du dodécaèdre. Le rapport entre le sinus et le cosinus de sa moitié, ou entre $B\omega=g'$ (fig. 91) et $\omega\mu$ (fig. 91 et 92), sera celui de

$$\sqrt{(nxy+x+2y)^2\tfrac{1}{3}a^2+(nxy+x-y)^2 4g^2} \text{ à } (nxy-x)\sqrt{a^2}.$$

Quant au rapport entre le sinus et le cosinus de la plus petite, ou entre g' et $\lambda\Im$, on y parviendra de la manière suivante. Les triangles semblables alz, $\varepsilon\zeta x$, donnent $al : lz :: \varepsilon x : \varepsilon\zeta$. Or,

$$al=\sqrt{(az)^2+(lz)^2}$$
$$=\sqrt{a^2\left(\frac{2nxy-x+y}{3nxy}\right)+\left(\frac{nxy+x-y}{nxy}\right)^2\tfrac{1}{3}g^2},$$

$$\varepsilon x=a'+\gamma x=a\left(\frac{2x+y-nxy}{nxy+y}\cdot\frac{nxy+x+y}{nxy+x-y}\right)$$
$$+o\left(\frac{nxy+x+y}{nxy+x-y}\cdot\frac{nxy-x}{nxy+y}\right)=a.\frac{nxy+x+y}{nxy+x-y}\cdot\frac{x+y}{nxy+y}.$$

Substituant dans la proportion précédente les valeurs de al, lx et εx, et prenant la valeur de $\frac{1}{2}e\zeta = \lambda\vartheta$, on trouve

$$\tfrac{1}{2}e\zeta = a(nxy+x+y)\frac{x+y}{nxy+y}\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}$$
$$\overline{\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2(2nxy-x+y)^2+(nxy+x-y)^2\tfrac{1}{3}g^2}}.$$

Mais on a toujours

$$g' = g.\frac{nxy+x+y}{nxy+y};$$

donc

$$g' : \lambda\vartheta :: \sqrt{\tfrac{1}{3}a^2(2nxy-x+y)^2+(nxy+x-y)^2 4g^2} : (x+y)\sqrt{e}.$$

Pour le cas où le dodécaèdre est composé de deux pyramides droites, réunies base à base, on trouvera, en égalant les valeurs de ex et eh, $n = \frac{2x+y}{xy}$.

Il y a aussi un terme où le noyau hypothétique devient semblable au générateur. Pour trouver dans ce cas la valeur de n, on fera

$$g^2 : p^2 :: g^2 : \tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{2x+y-nxy}{nxy+x-y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}g^2.$$

Et opérant comme ci-dessus (p. 459), on trouvera

$$n = \frac{x+2y}{2xy}.$$

141. Si l'on suppose ex plus grande que eh, auquel cas le dodécaèdre tourne ses arêtes les moins saillantes vers les faces du générateur, on aura toujours

$$g' = g.\frac{nxy+x+y}{nxy+y};$$

mais on trouvera

$$a' = a \cdot \left(\frac{nxy - 2x - y}{nxy + y} \cdot \frac{nxy + x + y}{nxy + x - y} \right),$$

et

$$g' : p' :: g : \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2 \left(\frac{nxy - 2x - y}{nxy + x - y} \right)^2 + \tfrac{1}{36}g^2}.$$

La quantité N sera $\frac{nxy - x}{x + y}$, d'où l'on déduira

$$n = \frac{Nx + Ny + x}{xy}.$$

Pour avoir n', on fera attention que dans le cas présent, γq (fig. 92) représente la diagonale oblique du noyau hypothétique; on aura donc

$$qe : e\gamma :: \sqrt{\tfrac{4}{36}g'^2} : \sqrt{a'^2};$$

et parce que le décroissement qui donne le noyau hypothétique agit sur l'angle A du générateur,

$$qe : e\gamma :: (n'+1)\sqrt{\tfrac{4}{36}g^2} : \frac{2n'-1}{3}\sqrt{a^2} \text{ (p. 311)};$$

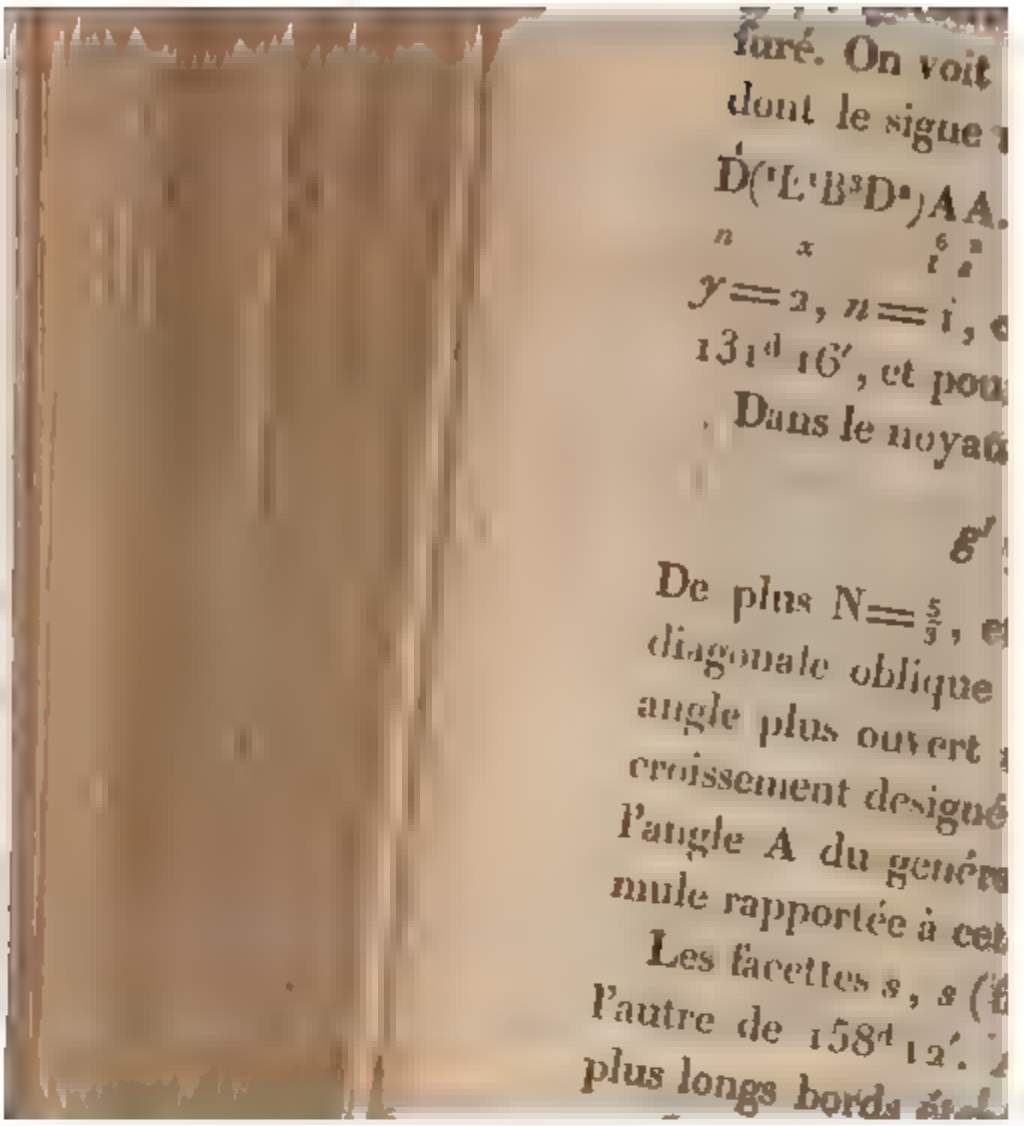
donc

$$g' : 2\sqrt{a'^2} :: (n'+1)g : (2n'-1)\sqrt{a^2}.$$

Et substituant à la place des rapports entre g' et g, et entre a' et a ceux de leurs valeurs algébriques, comme on l'a fait (p. 457), on trouvera

$$n' = \frac{nxy - x - y}{2x}.$$

A l'égard des rapports entre les sinus et les cosinus



faré. On voit
dont le sigue
$\dot{D}(^1L^1B^3D^4)AA.$
$\overset{n}{y}\ \overset{x}{=}\ 2,\ n = 1,$
$131^d\,16'$, et pou
Dans le noyau

g'

De plus $N = \frac{5}{3}$, e
diagonale oblique
angle plus ouvert
croissement designé
l'angle A du genér
mule rapportée à ce
Les facettes s, s (
l'autre de $158^d\,12'$.
plus longs bords

horizontale du rhomboïde dont il s'agit, et par a'' son axe, on aura $qe : ex$ ou

$$lz : az :: g'' : \sqrt{3p''^2 - g''^2} :: (nxy + x - y)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$$
$$: \frac{2nxy - x + y}{3}\sqrt{a^2}\ (\text{p. } 483) :: 8\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \tfrac{10}{3}\sqrt{a^2}.$$

Mais d'une autre part

$$g^2 : \sqrt{3p''^2 - g'^2} :: mu : au :: (3n+3)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$$
$$: (2n-1)\sqrt{a^2}\ (\text{p. } 311);$$

donc

$$8 : \tfrac{10}{3} :: 2n+3 : 2n-1;$$

d'où l'on tire $n=3$, ce qui indique un décroissement par six rangées sur l'angle A du générateur. L'incidence des mêmes facettes t sur les faces voisines x, x, sera de $155^d 38'$.

III. *Décroissemens intermédiaires sur les angles* e.

143. Nous avons fait voir, dans l'article précédent, qu'il existe entre les deux espèces de décroissemens qui ont lieu sur les angles E une relation qui permet de suivre à peu près la même marche pour les calculs qui concernent les uns et les autres. Cette relation s'étend aux décroissemens qui ont lieu sur les angles inférieurs, abstraction faite de quelques différences qui dépendent de celle que présentent les positions des quantités x et y situées toutes les deux sur les bords D, D, au lieu que dans les décroissemens sur E, l'une coïncide avec B et l'autre avec D. Nous

(-8° 90). Les
lignes de dépa
le dodécaèdre
et soient *uet*, *n*
faces QXN, QX
angles inférieur
tués à la naissan
cideront toujour
les moins saillan
les faces du gén
plus saillantes N
une certaine dista
du générateur. Ai
ront les mêmes pos
au lieu que dans l
les arêtes les moi
vaient être tournée

teur, et tantôt vers ses bords supérieurs, suivant que le nombre des rangées soustraites était plus grand ou plus petit. Par une suite nécessaire, les résultats relatifs aux décroissemens sur *e* se trouvent resserrés entre des limites plus étroites que ceux qui dépendent des deux premiers décroissemens, ainsi que je l'exposerai plus bas.

Soit maintenant *hx* (fig. 98) un système de lignes qui aient avec le dodécaèdre (fig. 97) les mêmes relations que celles qui composent la figure 74, avec le dodécaèdre que représente la figure 73. En comparant les deux systèmes, on voit que *gp* (fig 98) parallèle à *ox* remplace *dp* (fig. 74) parallèle à *qv*, et que *dp* (fig. 74) qui en partant de l'angle *d* se dirige parallèlement à *qx*, est remplacée par *dx* (fig. 98), qui en partant du même angle est l'analogue de *qx* (fig. 74). Par une suite nécessaire, *ay* qui était limitée par *dp* (fig. 74), s'étend jusqu'à ce qu'elle rencontre *qx* (fig. 98). De plus, *eh* qui était tantôt plus grande et tantôt plus petite que *ex*, dans les résultats relatifs au dodécaèdre (fig. 73), sera constamment plus petite, comme on le voit (fig. 98), dans ceux qui se rapportent au dodécaèdre (fig. 97).

144. La différence générale entre les formules de part et d'autre consiste en ce que la quantité γ, toutes les fois qu'elle n'est point multipliée par n, prend dans les calculs qui vont nous occuper un signe contraire à celui dont elle était affectée dans ceux qui ont pour objet le dodécaèdre (fig. 73). Du reste, les

fluences rés
la même co
tités analogu
les cas où l'o
cela doit être
quantité qui
signes qui préc
absolue de g'.

La marche
croissement se
tout ce que no
suivre, en prena
qui conduit aux
dans lesquels x c

145. Cherchon
nous tirerons de l
qui avait donné
(fig. 74). Nous av

à $nx\sqrt{g'^2+p'^2}$; mais

$$bt = \sqrt{g'^2+p'^2} \text{ et } by = ny\sqrt{g'^2+p'^2}.$$

Substituant ces valeurs dans la proportion

$$bm : yz = by :: bc : cz, \text{ ou } bm : by :: bc : bz - bc,$$

et observant que $bz = 2p'ny$, puisqu'il renferme autant de diagonales $2p'$ que by renferme de fois $\sqrt{g'^2+p'^2}$, nous aurons

$$nx\sqrt{g'^2+p'^2} : ny\sqrt{g'^2+p'^2} :: bc : 2p'ny - bc,$$

ce qui donne $bc = \frac{2p'nxy}{x+y}$.

Mais $bt : bc :: ay$ (fig. 98) $: ad$, ou

$$\sqrt{g'^2+p'^2} : \frac{2p'nxy}{x+y} :: ay : 2p, \text{ ou } \sqrt{g^2+p^2} : \frac{2pnxy}{x+y} :: ay : 2p;$$

donc $ay = \frac{x+y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2}$, quantité qui étant comparée à celle que nous avions obtenue (p. 442), offre, relativement au signe de γ, la différence que nous avons annoncée (p. 491).

146. Passons à l'expression de av. Soit fh (fig. 96) la ligne qui correspond à mt vers l'angle u opposé à b. Le plan mty étant parallèle à la face QXC (fig. 97) du dodécaèdre, si nous faisons passer par fh (fig. 96) un second plan parallèle à BXC (fig. 97), et si nous supposons que les deux plans se prolongent en allant de mt vers fh (fig. 96), leur réunion se fera sur une ligne parallèle à l'arête CX (fig. 97). Il suit de là que nous pouvons considérer la formation de cette arête,

Soient xx
l'autre à fh, t
tité dont le h
est dépassé pa
de la diagonal
l'arête ds égale
Maintenant c
que figure 96, s
sement située ve
rangée soustraite
présentée (fig. 72
perpendiculaire s
autre parallèle à la
que l'on ait $e\vartheta =$
d'une lame à l'autr

$dv \times$

Maintenant la

l'expression est $\sqrt{g'^2+p'^2}$, on aura, en divisant celle-ci par n, $b\gamma=\frac{1}{n}\sqrt{g'^2+p'^2}$ (fig. 99). D'ailleurs $b\mu$ égale à $b\lambda$ a aussi pour expression $x\sqrt{g'^2+p'^2}$. Donc

$$\gamma\mu \text{ ou } b\mu-b\gamma=\left(x-\frac{1}{n}\right)\sqrt{g'^2+p'^2}=\frac{nx-1}{n}\sqrt{g'^2+p'^2}.$$

De plus

$$\lambda\mu=2p'x,\ \omega\gamma=b\gamma=\frac{1}{n}\sqrt{g'^2+p'^2}.$$

Or,

$$\gamma\mu : \lambda\mu :: \omega\nu : d\nu ;$$

donc

$$\frac{nx-1}{n}\sqrt{g'^2+p'^2} : 2p'x :: \frac{1}{n}\sqrt{g'^2+p'^2} : d\nu=\frac{2p'x}{nx-1};$$

donc $\qquad dn \text{ (fig. 96)}=\frac{2p'nx}{nx-1}.$

Mais di, qui représente la dimension en hauteur, est égale à by ou à $ny\sqrt{g'^2+p'^2}$. De plus, le triangle ndi est semblable au triangle νag (fig. 98). Donc

$$di : dn \text{ (fig. 96)} :: ag : a\nu \text{ (fig. 98)} :: \frac{2p'nx}{nx-1} : ny\sqrt{g'^2+p'^2},$$

ou

$$:: \frac{2pnx}{nx-1} : ny\sqrt{g^2+p^2} :: \frac{2px}{nxy-y} : \sqrt{g^2+p^2};$$

donc puisque $ag=\sqrt{g^2+p^2}$, on aura

$$a\nu=\frac{2px}{nxy-y}, \text{ au lieu de } \frac{2px}{nxy+y} \text{ (p. 414).}$$

C'est l'expressi
signes de y son
2°. Pour $ap.$
sant de même
trouve $ap = \frac{\quad}{nx}$
(p. 445), avec u
à la quantité y.
148. Pour avo
nales g' et p' du r
des deux proportio
d'où l'on tire ex:

$$uh = ax +$$

$$pu = ap +$$

Ces deux

au décroissement sur E (p. 446), on aura

$$eh = a\,\frac{nxy+x+y}{nxy-x-y}\cdot\frac{2nxy+x+y}{3nxy+3x}.$$

Substituant cette valeur ainsi que celle de uh dans la proportion

$$gu = \sqrt{\tfrac{4}{36}g^2} : uh :: ge = \sqrt{\tfrac{4}{36}g'^2} : eh,$$

et dégageant g', on trouvera comme page 447,

$$g' = g\cdot\frac{nxy+x+y}{nxy+x}.$$

Maintenant,

$$eh+ex : eh-ex :: 3nxy+3x : nxy-x+2y.$$

D'une autre part,

$$eh+ex = hx = as+2(ax) = a\cdot\frac{nxy+x+y}{nxy-x-y},$$

et

$$(eh-ex) = \tfrac{1}{3}a.$$

Ces deux rapports combinés donnent

$$a' = a\cdot\frac{nxy+x+y}{nxy-x-y}\cdot\frac{nxy-x+2y}{nxy+x}.$$

Egalant cette dernière quantité à $9p'^2-3g'^2$, et mettant à la place de g' sa valeur, puis dégageant p', on aura

$$p' = \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left[\left(\frac{nxy-x+2y}{nxy-x+y}\right)^2+\tfrac{1}{36}g^2\right]\left(\frac{nxy+x+y}{nxy+x}\right)^2};$$

donc

$$g' : p' :: g : \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{nxy-x+2y}{nxy-x-y}\right)^2+\tfrac{1}{36}g^2},$$

Ayant mis à l
gébriques, on
$$a\left(\frac{x-y}{ny+x}\cdot\frac{nxy+}{nxy-}\right.$$
et réduisant, pu

comme à la page
quée. La même éq

$$n$$

Pour avoir n', co
pq, se meuvent par
loignant du centre,
$adsg$ se trouve ins
coutume le représente

le décroissement qui produit le noyau hypothétique étant censé agir directement sur l'angle e du générateur. Donc $g' : g :: 2a' : \frac{2n'+1}{n'-1}.a$. Mettant à la place des rapports entre g' et g, et entre a' et a ceux de leurs valeurs algébriques, et faisant les autres opérations convenables, on trouvera $n' = \frac{nxy-x+y}{2y}$, comme à la page 450, avec la différence ordinaire.

150. Il ne reste plus qu'à déterminer les incidences respectives des faces du dodécaèdre. En commençant par le rapport $C\omega : \omega\mu$ qui est celui du sinus au cosinus de la moitié de l'angle que font entre elles les faces NXQ, CXQ, on a d'abord $C\omega$ ou

$$g' = g.\frac{nxy+x+y}{nxy+x} \text{ (p. 497).}$$

On cherchera ensuite $\gamma\delta$ (fig. 98), qui est double de $\omega\mu$, en se servant de la proportion $dx : dr :: \gamma x : \gamma\delta$. Or,

$$dr = \sqrt{\tfrac{1}{3}g^2},\ dx = \sqrt{(re)^2+(dr)^2} = \sqrt{(hu)^2+\overline{dr}^2},\ \gamma x = \tfrac{1}{2}(hx-a').$$

Substituant à la place de dx, dr et γx leurs valeurs algébriques, et prenant la moitié de la valeur de $\gamma\delta$, on aura celle de $\omega\mu$, et l'on trouvera g' ou

$$\omega\mu :: \sqrt{(2nxy+x+y)^2\tfrac{1}{3}a^2+(nxy-x-y)^2\tfrac{1}{3}g^2}$$
$$(x-y)\sqrt{a^2},$$

même, sauf la différence ordinaire, trouvé page 453, pour les faces les

. de la quan
tion qui y c

$$gp = V$$

Mettant à la
on déduira d
ou de $\lambda\vartheta$, et

$$B\lambda : \lambda\vartheta :: \sqrt{nx}$$
$$: (nxy + y)V$$

rapport qui est
eignes de γ, que
(p. 452), relativ
du dodécaèdre p

151. Les résult
priétés particuliè
il s'agit ici. Le poi
comme je l'ai déjà
dant les

pothétique se trouveront sur les mêmes plans que celles du générateur, ce qui ne pourra se faire sans que les bords NQ, CQ, etc. (fig. 97), ne coïncident avec les arêtes *du*, *db*, etc. Il en résulte qu'alors y s'évanouit, et c'est effectivement ce qu'indique la formule relative à ce cas. Pour le prouver, servons-nous encore des rapports entre les diagonales du noyau hypothétique et du générateur, qui donnent la proportion suivante :

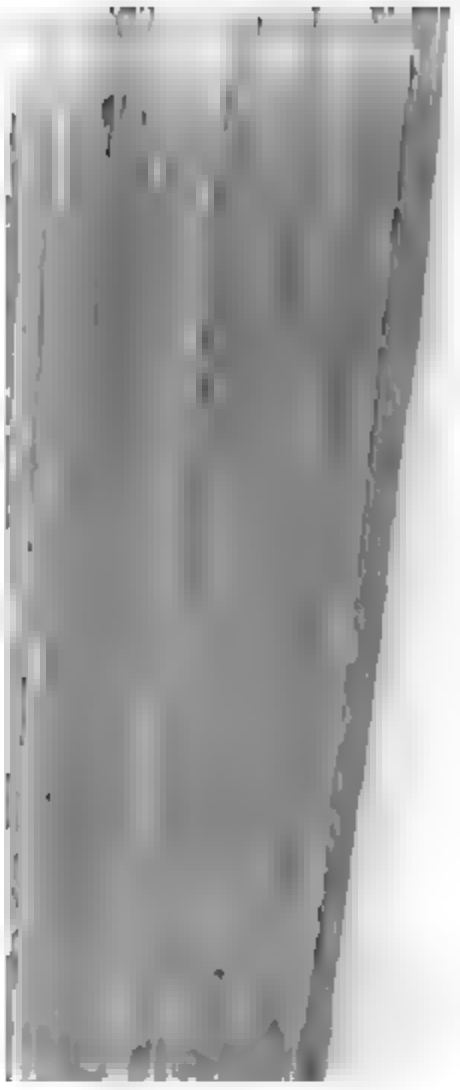
$$g^2 : p^2 :: g^2 : \tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{nxy-x+2y}{nxy-x-y}\right)^2+\tfrac{1}{3}g^2;$$

d'où l'on tire

$$3p^2-g^2=\tfrac{1}{3}a^2\left(\frac{nxy-x+2y}{nxy-x-y}\right)^2;$$

et parce que $3p^2-g^2$ représente le tiers du carré de l'axe, $\left(\frac{nxy-x+2y}{nxy-x-y}\right)^2=1$; ce qui donne, toute réduction faite, $y=0$.

152. A l'égard du cas où le dodécaèdre se trouverait changé en une double pyramide droite, il est facile de juger, à la seule inspection de la figure 98, qu'il ne peut avoir lieu en vertu du décroissement que nous considérons ici, puisque le point d de l'arête qx étant toujours plus éloigné du sommet x que du sommet h, quelque position que l'on donne à cette arête, jamais on n'aura $qx=qh$, ou $ex=eh$. Voyons ce que donne la formule relative à cette équation. Si nous substituons à la place de ex et



$ay =$

la première d

conde $av = \frac{}{x}$

surpassera $2y$,

tionnelle plus

aura lieu pour

sera $3y$. Donc,

genre, ay ou av é

et l'autre que la

rejetteront vers la

des positions telles

(fig. 98) entraînan

passera à la positio

gement aura lieu

En effet, d'une part,

$$sz : ds :: as + sz : ay,$$

ou

$$sz : \sqrt{g^2+p^2} :: a + sz : \frac{x-y}{x-2y}\sqrt{g^2+p^2},$$

ce qui donne

$$sz = a\left(\frac{x-2y}{3y}\right).$$

D'une autre part,

$$st : gs :: at : av; \text{ ou } st : 2p :: a + st : \frac{2px}{x-3y},$$

ce qui donne

$$st = a\left(\frac{x-3y}{3y}\right).$$

Donc

$$dr : rz :: \sqrt{\tfrac{1}{36}g^2} : \tfrac{1}{3}a + a\left(\frac{x-y}{3y}\right) :: \sqrt{\tfrac{1}{36}g^2} : \left(\frac{x-y}{3y}\right)a,$$

et

$$gu : ut :: \tfrac{1}{3}a + a\left(\frac{x-2y}{3y}\right) :: \sqrt{\tfrac{1}{36}g^2} : \left(\frac{x-y}{3y}\right)a.$$

Or, les deux rapports étant identiques, il en résulte que les lignes yz, et vt, ou sa parallèle φz, sont également inclinées en sens contraire, ce qui indique la double pyramide droite.

La loi qui donne cette double pyramide rentre alors parmi les décroissemens intermédiaires qui ont lieu directement sur les angles latéraux *dba* , *n'ba* (fig. 96), par une suite de ce que la ligne *ct* au lieu

…sement a lieu

Dans l'équatio

la valeur de *st*

rête *vt* se confo

que φz devient

cela doit être da

Lorsqu'ensuite

a l'équivalent d'u

les angles latéraux

et *y* avec D. Il y a

bm s'évanouit, et l

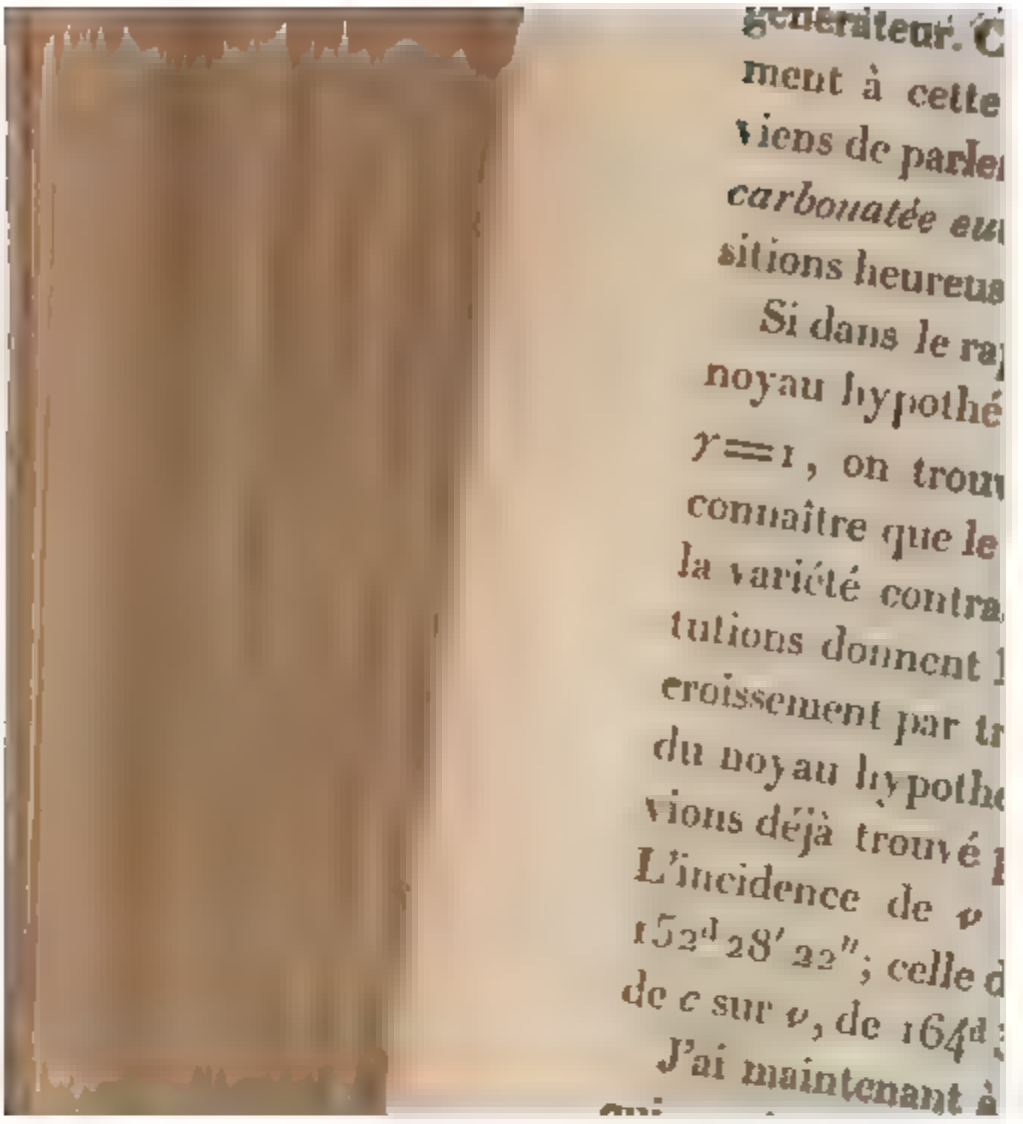
rête *ba*. Ce terme

tion *sz* (fig. 100) =

qui donne $sz = \frac{a \times o}{}$

Au-delà du même terme, x devenant plus petit que $2y$, la valeur de sz ou $a\left(\frac{x-2y}{3y}\right)$ est négative, alors les lignes yz, φz se réunissent en un point situé entre les sommets s, a, et le résultat est censé appartenir aux décroissemens intermédiaires sur l'angle supérieur A du générateur, qui feront l'objet de l'article suivant.

153. La cristallisation ne m'a encore offert qu'une seule forme à laquelle l'espèce de décroissement qui vient de nous occuper soit applicable, savoir, celle dont on voit la projection (fig. 101), et qui a pour signe $\overset{c}{e}(\overset{\frac{5}{2}}{E}\overset{\nu}{D^3}\overset{r}{D'}D'D^1)\overset{t}{D}B$. Les facettes ν qui dépendent du décroissement intermédiaire sont interposées entre les faces r de la variété métastatique et les faces c qui appartiennent au prisme hexaèdre régulier. Il résulte de cette disposition que la figure des faces c, qui serait celle d'un trapézoïde, si elles existaient solitairement, devient un rhombe par l'effet de ses intersections avec les facettes ν, ν'. Je prouverai plus bas que l'existence de ce rhombe peut avoir lieu pour un rhomboïde quelconque, et en vertu d'une infinité de combinaisons différentes de deux décroissemens, l'un ordinaire sur les bords inférieurs du générateur, l'autre intermédiaire sur les angles compris entre ces bords. De plus, le cristal est terminé de chaque côté par les facettes t, t, dont les



générateur. C
ment à cette
viens de parle
carbonatée eu
sitions heureus

Si dans le ra
noyau hypothé
$\gamma = 1$, on trou
connaître que le
la variété contra
tutions donnent
croissement par t
du noyau hypoth
vions déjà trouvé
L'incidence de ν
$152^d\,28'\,22''$; celle d
de c sur ν, de 164^d

J'ai maintenant à

soit divisée par une diagonale horizontale en deux triangles isocèles dont cette diagonale sera la base commune, et dont l'un, que nous désignerons par T, proviendra du décroissement ordinaire sur D, et l'autre qui sera indiqué par S, résultera du décroissement intermédiaire sur *e*. Soit *b* la base commune des deux triangles, *h* l'apothème du triangle T, *h'* celui du triangle S, *n* la loi relative au décroissement sur D, et *n'* celle qui se rapporte au décroissement sur *e*.

Maintenant *adsg* (fig. 102) étant la coupe principale du noyau, et *dp*, *dγ*, deux arêtes contiguës du dodécaèdre produit par le décroissement sur D, si par le milieu *o* de la diagonale oblique *ad* nous menons *oz* parallèle à l'axe *py*, nous aurons

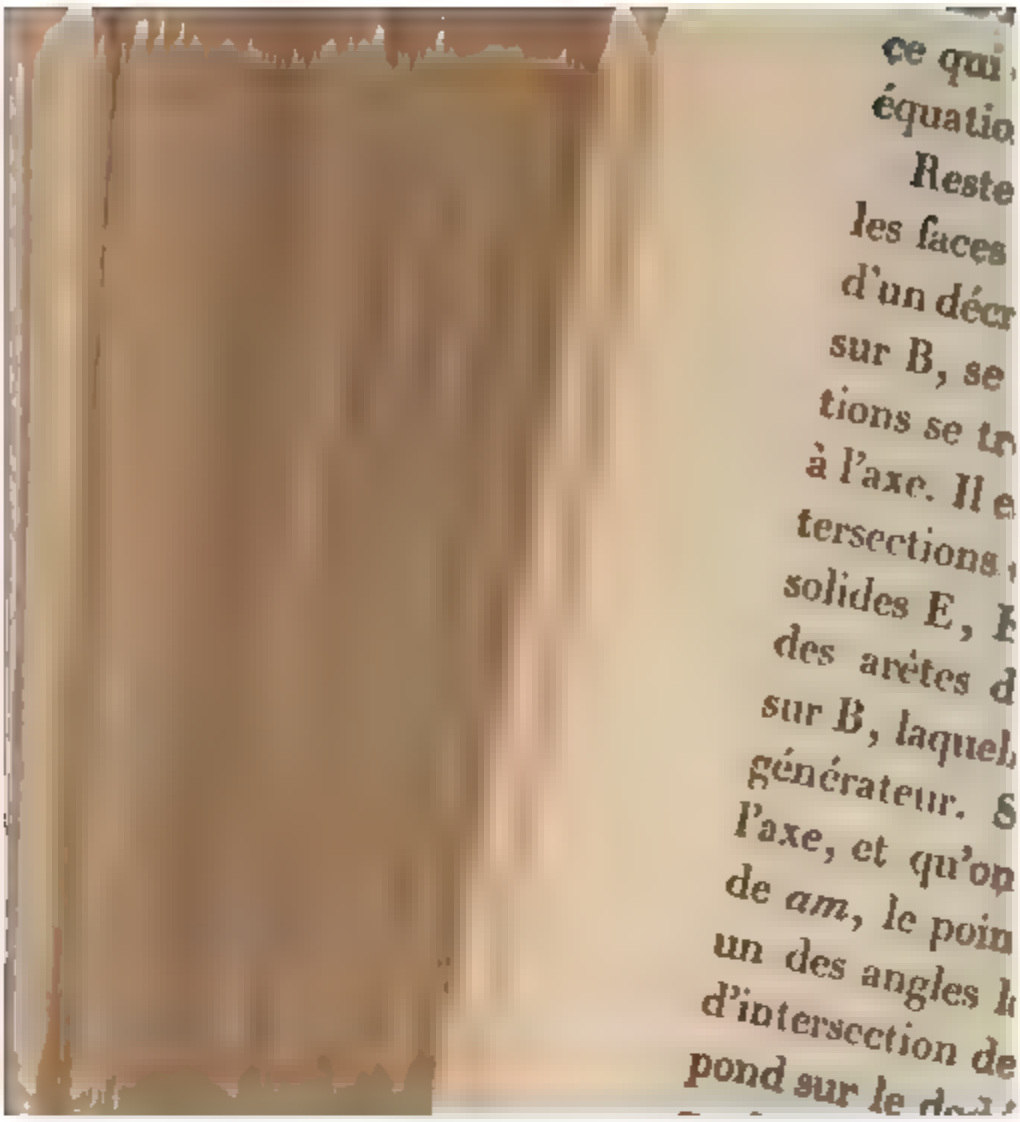
$$\tfrac{1}{2}b : h :: g : oz :: g : \tfrac{1}{2}ay :: g : \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{1}{n-1}.a\right) :: 3 \quad : \quad \frac{n}{n-1}.$$

D'une autre part, si nous menons $\omega\downarrow$ (fig. 98) parallèle à l'axe *hx*, nous aurons

$$\tfrac{1}{2}b : h' :: g' : \omega\downarrow :: g' : \tfrac{1}{2}\gamma x$$
$$:: g . \frac{n'xy+x+y}{n'xy+x} : \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{n'xy+x+y}{n'xy-x-y} \cdot \frac{x-y}{n'xy+x}$$
$$:: g : \tfrac{1}{2}a \frac{x-y}{n'xy-x-y}.$$

On aura donc, dans le cas du rhombe,

$$\tfrac{1}{2}a \cdot \frac{n}{n-1} = a \cdot \frac{x-y}{n'xy-x-y},$$



ce qui
équatio
Reste
les faces
d'un déc
sur B, se
tions se t
à l'axe. Il e
tersections
solides E, F
des arêtes d
sur B, laquel
générateur. S
l'axe, et qu'o
de *am*, le poin
un des angles l
d'intersection de
pond sur le de

croissement sur D, nous aurons

$$ux\ (\text{fig. } 103) = \frac{n'+1}{2n'-1}\sqrt{\tfrac{1}{36}g^2}\ (\text{p. } 294),$$

D'une autre part,

$$ap\ (\text{fig. } 102) = \frac{1}{n-1}.a,\ pr:dr::pu:ut;$$

ou

$$\left(\frac{1}{n-1}+\frac{2}{3}\right)a : \sqrt{\tfrac{1}{36}g^2} :: \left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{3}\right)a : ut;$$

donc

$$ut = \frac{n+2}{2n+1}\sqrt{\tfrac{1}{36}g^2} = \frac{n'+1}{2n'-1}\sqrt{\tfrac{1}{36}g^2};$$

d'où l'on tire $n' = n+1$.

Parmi les différentes lois de décroissement qui déterminent les formes des variétés de chaux carbonatée, on en connaît huit, dont quatre ont pour expressions $\overset{2}{B}, \overset{3}{B}, \overset{4}{B}, \overset{6}{B}$, et les quatre autres $\overset{1}{D}, \overset{2}{D}, \overset{3}{D}, \overset{5}{D}$, ce qui donne les combinaisons suivantes, $\overset{1}{D}\underset{2}{B}$, $\overset{1}{D}\underset{3}{B}$, $\overset{3}{D}\underset{4}{B}$, $\overset{4}{D}\underset{6}{B}$, qui toutes réalisent la propriété que je viens de démontrer. Mais jusqu'ici il n'y a que les deux lois représentées par la seconde qui soient associées dans une même cristallisation, qui est celle de la variété cuthétique; les autres agissent solitairement dans la production des formes qui en offrent les résultats.

caèdre secon
mités du mê
communs au
Soit *adsg* (
rateur, et *an*,
caèdre situées
En comparant
que la ligne *ax*
entre les somm
l'autre; et que l
de *ag*, *ad*, son
(fig. 105), qui
de la diagonale
Ainsi, au lieu des
ax, *ay*, *az*, à l'aid
problèmes relatifs
n'aurons, dans le c
qui suffiront pour r

de $-y$ à x, dans les quantités où elles ne sont multipliées ni par n, ni l'une par l'autre. Je ferai connaître les exceptions à mesure qu'elles se présenteront.

155. Soit as (fig. 106) le générateur, et ltf, cef, deux plans parallèles aux faces NaQ (fig. 104), CaQ, pris de manière que lt, ce, représentent les lignes de départ du décroissement. Nous aurons, en appliquant ici ce qui a été dit des autres décroissemens,

$$al = nx\sqrt{g'^2+p'^2},\ at = ny\sqrt{g'^2+p'^2},\ am = 2p'ny,$$

et $$af = \sqrt{g'^2+p'^2};$$

et parce que les triangles maf (fig. 106), adv (fig. 105) sont semblables, $am : af$ (fig. 106) $:: ad : dv$. Or, dans le cas particulier dont il s'agit ici, ces triangles font l'un à l'égard de l'autre les mêmes fonctions que les triangles tbc (fig. 96) et day (fig. 98); d'où il suit que l'expression de dv (fig. 105) sera la même que celle qui a été trouvée (p. 493) pour ay; c'est-à-dire que $dv = \frac{x+y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2}$.

La construction de la figure 106 peut encore nous servir pour trouver l'expression de $g\mathfrak{Y}$ (fig. 105). Car soit ir (fig. 106) une ligne située en sens contraire de la ligne tf, et inclinée de la même quantité. Si nous menons tl et fl, les deux plans ltf, lir, seront parallèles aux faces QaC, BaC (fig. 104) du dodécaèdre. Menons fz (fig. 106) parallèle à at et égale à af, puis az. Les triangles semblables ato, fzc,

Maintenant les
(fig. 105), dont

$$al = n$$

ou

$$nx\sqrt{g^2+}$$

ou

$$nx\sqrt{g^2+}$$

dont

Cette expression, t
laquelle est $\frac{2px}{nxy-y}$
sur e, présente, com
que nous avons dit s
entre les

coupe principale est représentée par le quadrilatère $a'ns'\lambda$ (fig. 107). Ce rapport dépend de celui de $a\omega$ à ωs, et pour avoir ce dernier, il faut chercher successivement ceux de $n\omega$ à ωs, et de $n\omega$ à $a\omega$.

Ayant mené $\vartheta\sigma$ (fig. 105) perpendiculaire sur l'axe as, nous aurons

$$n\omega : \omega s :: \lambda\mu : a\mu :: \vartheta\sigma : a\sigma ,$$

Cherchons $\vartheta\sigma$ et $a\sigma$.

1°. Pour $\vartheta\sigma$. Nous avons

$$sg : s\vartheta :: gu : \vartheta\sigma ,$$

ou

$$2p : 2p + \frac{2py}{nxy+x} :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \vartheta\sigma = \frac{nxy+x+y}{nxy+x}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

2°. Pour $a\sigma$.

$$\vartheta\sigma : \sigma s = as - a\sigma :: gu : us ,$$

ou

$$\frac{nxy+x+y}{nxy+x}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : a - a\sigma :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \tfrac{3}{3}a :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} : \tfrac{1}{3}a ;$$

d'où l'on tire

$$a\sigma = a - \left(\frac{nxy+x-y}{nxy+x}\right)\tfrac{3}{3}a = \frac{nxy+x-2y}{3nxy+3x}.a.$$

Ces expressions de $\vartheta\sigma$ et $a\sigma$ substituées dans la proportion $n\omega : \omega s :: \vartheta\sigma : a\sigma$, donnent

$$n\omega : \omega s :: (3nxy+3x+3y)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : (3nxy+x-2y)a.$$

Le second rapport, qui est celui de $n\omega$ à $a\omega$, dépend de la proportion $n\omega : a\omega :: \nu\tau : a\tau$.

1°. Pour $v\tau$.

$$sd : sv = sd + dr :: dr : v\tau,$$

ou

$$\sqrt{g^2+p^2} : \sqrt{g^2+p^2} + \frac{x+y}{nxy}\sqrt{g^2+p^2} :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}$$

$$: v\tau = \frac{nxy+x+y}{nxy}\cdot\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

2°. Pour $a\tau$.

$$v\tau : \tau s = as - a\tau :: dr : rs,$$

ou

$$\frac{nxy+x+y}{nxy}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : a \quad a\tau :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} \; y \; \tfrac{1}{3}a;$$

d'où l'on tire

$$a\tau = a - \frac{nxy+x+y}{nxy}\cdot a = \frac{2nxy-x-y}{3nxy}\cdot a.$$

Donc

$$n\omega : a\omega :: \frac{nxy+x+y}{nxy}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2nxy-x-y}{3nxy}\cdot a$$

$$:: (3nxy+3x+3y)\tfrac{4}{3}g^2 : (2nxy-x-y)a;$$

donc

$$a\omega : \omega s :: 2nxy-x-y : nxy+x-3y.$$

Soit $2nxy-y-x=m$ et $nxy+x-2y=n$. Nous aurons $m+n : m :: as : a\omega$. Et mettant à la place de m, n, as, leurs valeurs, puis réduisant,

$$3nxy-3y : 2nxy-x-y :: a : a\omega = \frac{2nxy-x-y}{3nxy-3y}\cdot a.$$

$$\omega s = as - a\alpha = a - \left(\frac{2nxy-x-y}{3nxy-3y}\right) = \frac{nxy+x-2y}{3nxy-3y}\cdot a.$$

Mais nous avons eu

$$n\omega = \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \omega s :: (3nxy+3x+3y)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : (nxy+x-2y)a.$$

Mettant à la place de ωs sa valeur, et réduisant, on trouvera $g' = g \cdot \frac{nxy+x+y}{nxy-y}$, quantité dont le dénominateur seul est affecté de la différence indiquée plus haut (p. 510).

La valeur de p' dépend de celle de a' qu'il faut d'abord trouver. Or, $a\omega - \omega s$ est le tiers de cette dernière; prenant la différence entre les expressions de $a\omega$ et ωs, et la triplant, on trouve

$$a' = a\left(\frac{nxy-2x+y}{nxy-y}\right);$$

donc

$$9p'^2 - 3g'^2 = a\left(\frac{nxy-2x+y}{nxy-y}\right).$$

Mettant à la place de g'^2 sa valeur, puis dégageant p', on aura

$$p' = \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{nxy-2x+y}{nxy+x+y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}g^2\left(\frac{nxy+x+y}{nxy-y}\right)^2};$$

donc

$$g' : p' :: g : \sqrt{\tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{nxy-2x+y}{nxy-y}\right)^2 + \tfrac{1}{3}g^2},$$

rapport qui est le même, sauf la différence indiquée, que celui qui a été trouvé pour les décroissemens sur E (p. 456), dans le cas où le dodécaèdre tourne, comme ici, ses arêtes les moins saillantes vers les faces du générateur.

157. Pour avoir N, on considérera que l'axe du dodécaèdre étant égal dans le cas présent à l'axe du générateur, la partie de l'axe du premier, qui excède l'axe du noyau hypothétique est $\frac{1}{2}(a-a')=\frac{x-y}{nxy-y}$, toute réduction faite. De

$$\frac{1}{N-1}a'=\frac{x-y}{nxy}.a=\frac{nxy-y}{nxy-2x+y}.a';$$

d'où l'on tire

$$N=\frac{nx}{x}-\frac{x}{y},$$

expression qui est la même que celle de N (p. 457), dans l'hypothèse de ex plus grande que eh, en ayant égard à la différence indiquée. La même équation donne $n=\frac{Nx-Ny+x}{xy}$.

158. Concevons que les quatre côtés du quadrilatère $a'ns'\lambda$ se meuvent parallèlement à eux-mêmes, en s'éloignant du centre, jusqu'à ce que les points a', s', se confondent avec les points a, s, comme on le voit, fig. 108. Il est visible que le décroissement d'où résulterait un rhomboïde semblable au noyau hypothétique agirait sur les angles supérieurs du générateur. Soit toujours n' le nombre de rangées soustraites. Nous aurons d'une part

$$n'r : ar :: n\omega \text{ (fig. 107)} : a\omega :: \sqrt{\tfrac{3}{4}g'^2} : \tfrac{1}{2}a',$$

et d'une autre part

$$n'r \text{(fig. 108)} : ar :: (n'+1)\sqrt{\tfrac{3}{4}g^2} : \frac{2n'-1}{n'+\frac{1}{2}}\sqrt{a^2};$$

donc

$$g' : g :: 2a' : \frac{2n'-1}{n'+1}.a.$$

Substituant aux rapports entre g et g' et entre a et a' ceux de leurs valeurs algébriques, on aura

$$nxy+x+y : nxy-y :: 2nxy-4x+2y : \frac{2n'-1}{n'+1}(nxy-y);$$

d'où l'on tire

$$n' = \frac{nxy-x+y}{2x},$$

comme nous l'avons eu pour les décroissemens sur E (p. 458), en tenant compte de la différence ordinaire.

159. Pour avoir le rapport entre le sinus et le cosinus de la moitié de l'incidence de NaQ sur CaQ, menons $a'f$ perpendiculaire sur $a\nu$ (fig. 107), et du milieu o de $a'\nu$ une autre perpendiculaire sur la même ligne $a\nu$. Le rapport cherché sera celui de g' à oh, moitié de $a'f$, dont il s'agit de trouver l'expression. Les triangles semblables $a'af$, $a\nu\omega$ ou $a\nu\tau$ (fig. 105), donnent

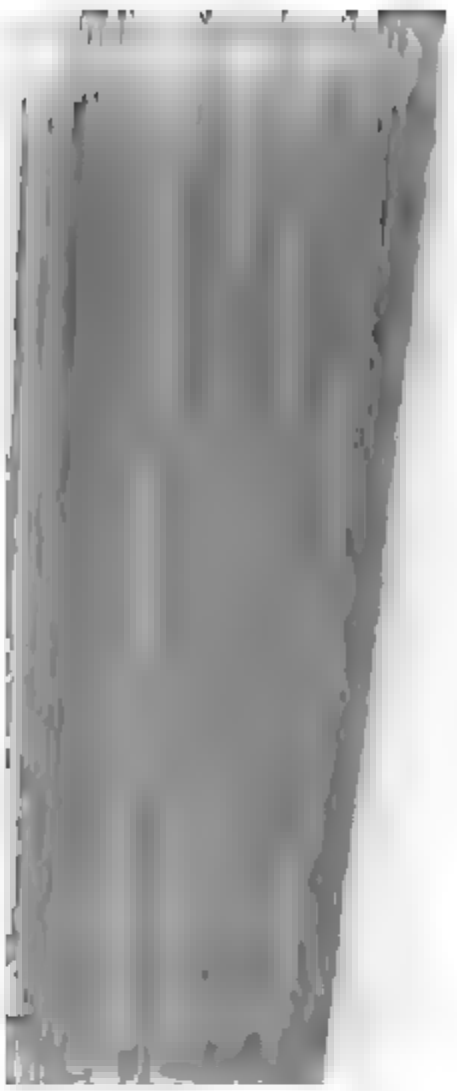
$$a\nu : \nu\tau :: aa' : a'f, \quad a\nu = \sqrt{(a\tau)^2+(\nu\tau)^2}$$

$$= \sqrt{a^2\left(\frac{2nxy-x-y}{3nxy}\right)^2+\left(\frac{nxy+x+y}{nxy}\right)^2\frac{1}{36}g^2}\ \text{(p. 514)},$$

$$aa' = \tfrac{1}{2}(as-a's) = \tfrac{1}{2}(a-a') = a-a\left(\frac{nxy-2x+y}{nxy-y}\right)$$

$$= a.\frac{x-y}{nxy-y}.$$

Mettant dans la proportion précédente à la place



mier terme d
second terme,
de l'angle cher

$$:: \sqrt{\tfrac{1}{3}a^2(2nxy -}$$

rapport qui con
qui a été trouvé
160. Passons
respective des fi
(fig. 107) de l'a
milieu *l* de la dis
perpendiculaires s
sinus et le cosinus
l'incidence cherché
Tout se réduit dou
dernière ligne. Or, l
donnent

$$as' \cdot s' \ldots$$

Mettant, dans la proportion précédente, à la place de as', $a\vartheta$ et $\vartheta\sigma$ leurs valeurs, et prenant celle de $s't$, on trouve

$$s't = \frac{\frac{nxy'-x}{nxy-y}.\,a\sqrt{(nxy'+x+y)^2\tfrac{1}{3}g^2}}{\sqrt{(nxy+x-2y)^2\tfrac{1}{3}a^2+(nxy+x+y)^2\tfrac{1}{3}g^2}}.$$

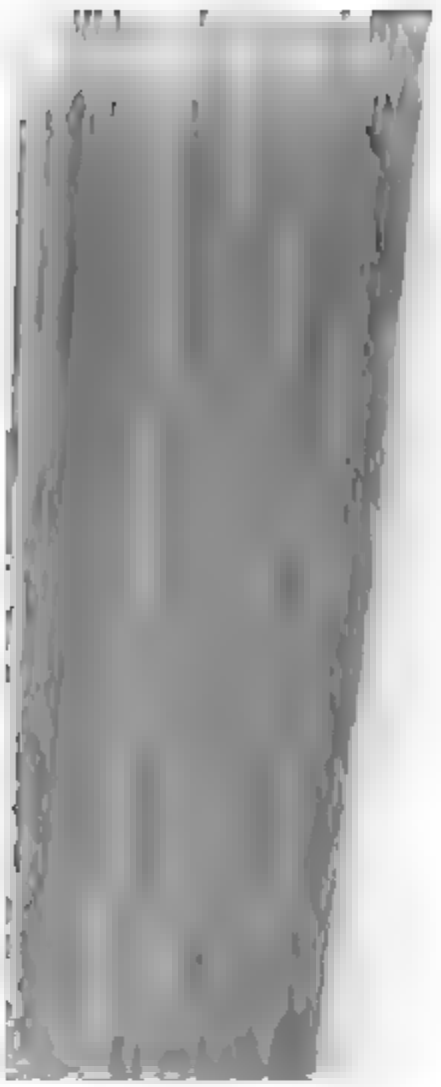
Donc la valeur de g' étant le premier terme du rapport et la moitié de celle de $s't$ étant le second, le sinus cherché sera au cosinus

$$:: \sqrt{(nxy+x-2y)^2\tfrac{1}{3}a^2+(nxy+x+y)^2 g^2} : (nxy-x)\sqrt{a^2}.$$

Comparez ce rapport avec celui qui a été trouvé (p. 452) entre $B\omega$ et $\omega\mu$.

161. A mesure que n diminue, l'angle que font entre elles les faces QaC, BaC augmente, et il y a un terme où ces faces se trouvant sur un même plan, le dodécaèdre se trouve converti en rhomboïde. On peut aussi considérer ce rhomboïde comme le résultat d'un décroissement ordinaire par renversement sur les angles A.

Soit $adsg$ (fig. 109) la coupe principale du générateur, et soit aor le triangle mensurateur relatif au rhomboïde dont il s'agit. Soit n' la loi qui le produit par renversement. De plus, soit as (fig. 110) le générateur, gl et fh les directions des bords des lames qui subissent le décroissement intermédiaire, lorsque le dodécaèdre s'est converti en rhomboïde; soit gk une autre direction qui a lieu sur la face $agmu$. Dans ce cas $al = ak$. Or, $al = y$; donc $n = \frac{1}{ak} = \frac{1}{y}$.



Cherchons l
menons aupa
la diagonale *a*
fig. 110. Les t

$$ag : a$$

Mais *ag* (fig. 1
ferme autant d
renfermées dan
est *y*, nous auron
de $ag : at :: n' \sqrt{}$

$$x\sqrt{g'^2+p'^2} : yp'$$

On voit combien
ment ordinaire à c
Soit $n' = 3$ ...

de la demi-incidence des faces du rhomboïde est égal au rapport entre le sinus et le cosinus de celle des faces NaQ, CaQ (fig. 104); c'est-à-dire au rapport

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}a^2(2nxy-x-y)^2+(nxy+x+y)^2 4g^2}:(x-y)\sqrt{a^2}.$$

Mais $g=\sqrt{1}$, $p=\sqrt{3}$, $a=\sqrt{24}$, $x=3$, $y=2$, $n=\frac{1}{2}$. Donc

$$\sin\tfrac{1}{2}\text{incid.} : \text{cosin} :: \sqrt{8(6-5)^2+(3+5)^2 4} : \sqrt{24}$$
$$:: \sqrt{66} : \sqrt{6} :: \sqrt{11} : 1.$$

D'une autre part, dans un rhomboïde,

$$\sin\tfrac{1}{2}\text{incid} : \cos :: \sqrt{g^2+p^2} : \sqrt{3p^2-g^2}.$$

Or ici, $g=\sqrt{8}$, $p=\sqrt{3}$; donc

$$\sin\tfrac{1}{2}\text{incid.} : \cos :: \sqrt{11} : \sqrt{1},$$

ce qui est le même rapport.

162. Le cas où $a\omega$ étant égale à ωs, le dodécaèdre devient une double pyramide droite hexaèdre, peut aussi avoir lieu en vertu du décroissement dont il s'agit ici. On a alors

$$2nxy-x-y=nxy+x-2y,$$

d'où l'on tire

$$n=\frac{2x-y}{xy}, \text{ au lieu de } n=\frac{x+2y}{xy} \text{ (p. 454).}$$

Si l'on substitue cette valeur $\frac{2x-y}{xy}$ de n dans celle

...faces N
plus petits an
temps le noya
obliques vers
diagonales ad,
La valeur de

c'est-à-dire que

Pour avoir ce
de $a\omega - \omega s$, ou a
(p. 515), et en
calcul, on aura

$$a' = a \cdot \frac{2x-}{nxy}$$

et

$$p' = \sqrt{\frac{1}{2}a^2\left(\frac{2x-}{n.}\right.}$$

donc

par $\frac{1}{3}a^3$, ce qui est conforme à l'analogie des autres décroissemens.

En poursuivant le calcul, d'après la même substitution, on trouvera

$$N = \frac{x-y}{nxy-x} \text{ au lieu de } N = \frac{nxy-x}{x-y},$$

d'où l'on déduira $n = \frac{Nx+x-y}{Nxy}$.

Pour avoir l'expression de n', on supposera que les côtés de la coupe principale $a'ms'\lambda$ (fig. 111) du noyau hypothétique se meuvent parallèlement à eux-mêmes en s'écartant de l'axe, jusqu'à ce que la coupe principale du générateur se trouve inscrite dans la précédente, comme le représente la fig. 112. Il est facile de juger, à la seule inspection de celle ci, que le décroissement relatif à n' est censé agir par renversement sur l'angle supérieur de la face du générateur à laquelle appartient la diagonale ad.

Or, d'une part,

$$\lambda' r : ar :: \lambda\mu \text{ (fig. 111)} : a'\mu :: \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} : \tfrac{2}{3}a';$$

d'une autre part,

$$\lambda' r : ar \text{ (fig. 112)} :: (n'+1)\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{1-2n'}{3} . a \text{ (p. 317)};$$

ic

$$g : g' :: \frac{1-2n'}{n'+1} . a : 2a'.$$

$$\ldots \frac{nxy+x+y}{nxy-y}, \text{ et } a' = a . \frac{2x-y-nxy}{nxy-y}.$$

où $a\omega$ est p
sement se
générateur,
de n qu'il ag
versement. L

que n sera plu

qui donne la
toutes les fois

Quant aux r
des angles qui d
faces du dodéca
le cas de $a\omega$ plus
blable à celle qu

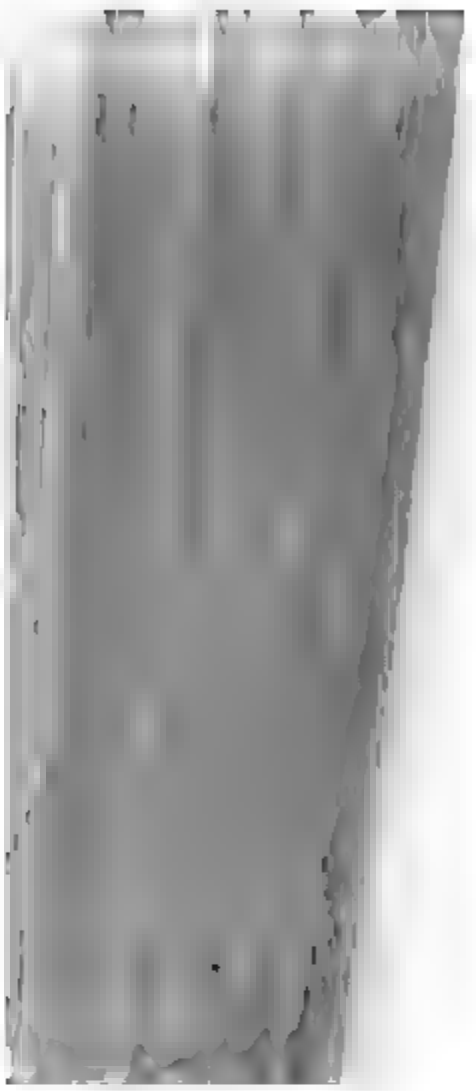
163. Si l'on s'e
Cristallographie,
hypothétique serai
être réalisée par l
s'agit ici

(fig. 197) ou $\sqrt{\frac{4}{3}g'^2}$ étant toujours plus grande que dr (fig. 105) ou $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$, il n'arrive jamais que les dimensions du noyau hypothétique soient en rapport avec celles du générateur. Cependant, comme le calcul conduit à des formules qui représentent ce dernier cas, j'ai cru qu'il ne serait pas inutile de faire connaître ce que signifient ces formules, et de donner ici un nouvel exemple de ces sortes d'excursions que font les théories, au-delà des limites tracées par les résultats de la nature.

Concevons que l'axe du noyau hypothétique soit égal à celui du générateur. Faisant $a' = a$, dans l'équation $a' = \frac{2x - y - nxy}{nxy - y}\frac{-nxy}{-y}$, nous aurons

$$2x - y - nxy = nxy - y,$$

ce qui donne $n = \frac{1}{y}$. Si nous mettons cette valeur à la place de n, dans la quantité $(nxy - x)\sqrt{a^2}$ (p. 519) qui représente le cosinus de la moitié de l'angle que font entre elles les faces QaC, BaC (fig. 104) du dodécaèdre secondaire, nous aurons pour résultat $(x - x)\sqrt{a^2}$, c'est-à-dire qu'alors le cosinus s'évanouissant, les deux faces dont il s'agit coïncident sur un même plan, en sorte que le dodécaèdre se trouve transformé en rhomboïde. Les faces du noyau hypothétique se confondent avec celles de ce rhomboïde, en sorte que le nombre de rangées soustraites désigné par N devient infini. Effective-



Dans ce cas ,

$$2nxy - x - y$$

Si l'on met ce

celle-ci devien
qu'alors les lig
laires sur l'axe,
résulte que les
dessus et l'autre
sont égales à as o
164. Si n conti
se renversent pou
position qu'elles o
arêtes sn, $s\lambda$ reste
C'est à un certain te

confondent avec les angles solides du noyau hypothétique. C'est ce que nous allons vérifier à l'aide du calcul.

Le quadrilatère $\zeta\gamma\upsilon\pi$ (fig. 113) étant la coupe principale du noyau hypothétique, et $adsg$ celle du générateur, menons $\gamma\varphi$ perpendiculaire sur l'axe $\zeta\upsilon$, et qui aura pour expression $\sqrt{\frac{4}{3}g'^2}$. Soient $d\nu$ et $g\vartheta$ les lignes qui, dans le cas présent, répondent à celles que désignent les mêmes lettres (fig. 107). Par les points a, ν menons la ligne indéfinie $a\nu$, et désignons par γ' le point, quel qu'il soit, où elle rencontre la perpendiculaire $\gamma\varphi$. Il s'agit de prouver que

$$\gamma'\varphi = \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}.$$

Puisque le noyau hypothétique est semblable au véritable, nous aurons

$$p'^2 = p^2 = \tfrac{1}{9}a^2\left(\frac{2x-y-nxy}{nxy+x+y}\right) + \tfrac{1}{3}g^2,$$

et

$$9p^2 - 3g^2 = a^2 \cdot \left(\frac{2x-y-nxy}{nxy+x+y}\right)^2.$$

Or, $$9p^2 - 3g^2 = a^2.$$

Donc $$\frac{2x-y-nxy}{nxy+x+y} = 1;$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{x-2y}{2xy}.$$

Si l'on met le dernier membre à la place de n, dans les équations qui donnent les valeurs de $d\nu$ (p. 511),

e qui donne

$$\gamma'\phi = \frac{a'-3a}{12.ay} \times 3x\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Et mettant à la place de a' sa valeur $a \cdot \frac{3x}{x-4y}$,

$$\gamma'\phi = \frac{3x}{x-4y}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}.$$

Mais $$g' = g\cdot\frac{3x}{x-4y},$$

ou $$\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} = \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}\cdot\frac{3x}{x-4y},$$

donc $$\gamma'\phi = \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}.$$

Donc les points γ' et γ se confondant, la ligne av prolongée passe par l'angle solide γ du noyau hypothétique.

Maintenant dn, prolongement de ad, étant l'analogue de $g\vartheta$, il faut encore prouver que si, par les points s, n, on mène une ligne indéfinie, laquelle répond à l'arête sn (fig. 111), le point γ'' (fig. 113), quel qu'il soit, où elle rencontrera la ligne $\gamma\phi$, se confondra avec les points γ', γ; ou, ce qui revient au même, il faut prouver que la ligne indéfinie menée par les points a, ϑ, et qui répond à $a\lambda$ (fig. 107), va couper la perpendiculaire $\pi\sigma$ (fig. 113) sur l'axe du noyau hypothétique, en un point π' qui se confond avec le point π, en sorte que l'on aura

$$\pi'\sigma = \sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2}.$$

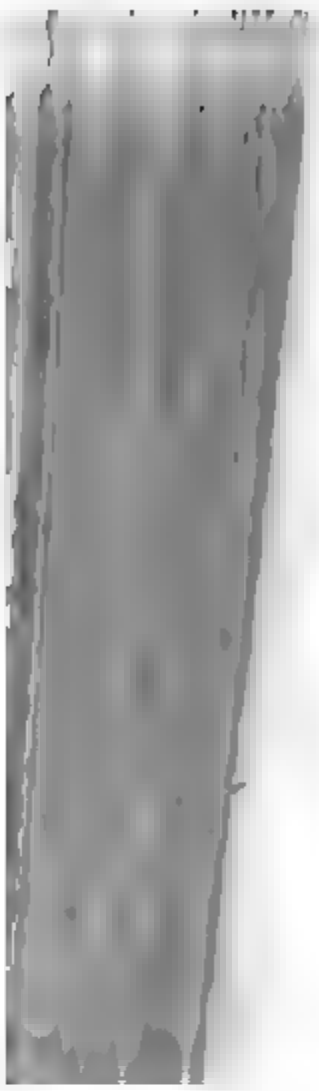
165. Je n'ai rencontré jusqu'ici aucun exemple d'un décroissement intermédiaire sur A. Mais pour avoir une application au moins hypothétique des résultats précédens, choisissons d'abord le cas où $a\omega$ est plus grande que ωs, et faisons $g = \sqrt{3}$, $p = \sqrt{2}$, $a = \sqrt{9}$, comme dans le rhomboïde primitif de la chaux carbonatée, et $x = 5$, $y = 1$, $n = 3$.

Dans le cas où le solide secondaire que je supposerai être représenté par la figure 104, tourne ses faces les plus inclinées vers les rhombes du générateur, on trouvera $g' : p' :: \sqrt{47} : \sqrt{53}$, ce qui donne pour les angles plans du rhomboïde hypothétique $118^d\,2'\,4''$, et $61^d\,57'\,56''$. On aura, dans la même hypothèse, $N = \frac{5}{2}$ et $n' = \frac{9}{5}$. Le rapport entre le sinus et le cosinus de la moitié de l'angle qui mesure la plus grande inclinaison des faces du dodécaèdre sera celui de $\sqrt{195} : \sqrt{4}$, d'où il suit que l'angle dont il s'agit est de $163^d\,41'\,54''$. Le rapport analogue, pour la plus petite inclinaison, sera celui de $\sqrt{174}$ à 5, et l'on aura pour cette inclinaison $138^d\,28'\,54''$.

Dans le cas de la double pyramide droite hexaèdre, on trouvera $n = \frac{9}{5}$.

Si l'on suppose ensuite que $a\omega$ soit plus petite que ωs, ou, ce qui revient au même, que le dodécaèdre tourne ses faces les moins inclinées vers les faces du générateur, et si, en continuant de faire

$$g = \sqrt{3},\ a = 3,\ x = 5,\ y = 1,$$



...ue des...
à celui qui résulterait
deux rangées sur l'an
formule $n = \frac{2 - n'}{4n' + 1}$ (

$$n = \frac{2}{\frac{1}{2}}$$

Le rapport entre le s
qui mesure la plus gran
dodécaèdre secondaire s
qui donne pour cette in
rapport correspondant,
naison, sera celui de $\sqrt{5}$
que cette dernière inclinai

J'ai choisi le rapport 5
parce qu'il donne des quan
du noyau hypothétique et p
s'agit d'évalu...

nérateur, comme on le voit (fig. 113), on trouve

dv ou $\frac{2x+2y}{x-2y}\sqrt{g^2+p^2}=4\sqrt{5}, g\vartheta$, ou $\frac{2y\,.\,2p}{3x-2y}=\frac{8}{13}\sqrt{8}$,

g' ou $g\,.\,\frac{3x}{x-4y}=15\sqrt{3}$, et a' ou $a\,.\,\frac{3x}{x-4y}=15\times 3$.

Si l'on fait $x=4, y=1$, on trouve $dv=5\sqrt{g^2+p^2}$,

$$g\vartheta=\tfrac{1}{5}\,.\,2p, \text{ et } a'=a\,.\,\tfrac{12}{5},$$

c'est-à-dire qu'alors l'axe du noyau hypothétique devient infini. En voici la raison. Nous avons, dans le cas présent, $ad : dv :: 2p : 5\sqrt{g^2+p^2}$, et

$$g\vartheta : ag :: \tfrac{1}{5}\,.\,2p : \sqrt{g^2+p^2} :: 2p : 5\sqrt{g^2+p^2}.$$

Donc les triangles adv, $\vartheta g\alpha$ étant semblables, les lignes $a\pi'$, $a\gamma'$ d'une part, et $s\gamma'$, $s\pi'$ de l'autre, coïncident sur une même direction, d'où il suit que $a\gamma'$ devenant parallèle à $s\gamma'$ et $a\pi'$ à $s\pi'$, les points de concours de ces lignes, ou, ce qui revient au même, les angles γ, π du noyau hypothétique sont censés être à une distance infinie de l'axe as. Donc l'axe ζv devient lui-même une quantité infinie.

166. Je terminerai la théorie des décroissemens intermédiaires relatifs au rhomboïde, par la solution d'un problème analogue à celui qui nous a occupés pages 416 et suivantes. Dans ce dernier, j'ai supposé un dodécaèdre produit par un décroissement quelconque sur les bords inférieurs d'un rhomboïde pris pour générateur, et j'ai prouvé que l'on pouvait con-

grande généralité, e
faces du rhomboïde
positions, dans chacu
dépendre le dodécaèd
termédiaires.

Voici donc l'énoncé
rapport $g : p$ entre les
boïde considéré comme
décroissement qui prod
sant sur les bords D du g
entre les demi-diagonal
quelconque qui soit seul
relativement au généra
d'une loi ordinaire il y
médiaire susceptible d
comme forme secondaire
tique, et déterminer les
deux

167. Soient *bsh*, *gsh* (fig. 115), deux faces du dodécaèdre limitées par un plan horizontal *bhg*, et par un plan vertical *bsg*. Supposons d'abord que *hs* soit une des arêtes les plus saillantes. Soit *uht* la section de la face du noyau hypothétique, laquelle est tournée vers *hs*. Il est facile de concevoir que, dans le cas présent, le dodécaèdre est censé résulter d'un décroissement sur les angles E du noyau hypothétique, de manière que *x* est dans le sens de D, et *y* dans le sens de B. Mais nous verrons que les formules auxquelles on parvient s'appliquent également soit au cas où *x* serait dans le sens de B, soit à celui où le décroissement agirait sur un autre angle A ou *e*.

Concevons que *bh*, *ho* soient deux perpendiculaires sur l'axe du dodécaèdre, puis menons *bg*, *tu*, ensuite *sc* perpendiculaire sur *bg*, et *hs* à la rencontre de *tu* et de *sc*.

Soit $bo = m \cdot ho$, m étant une quantité que nous déterminerons bientôt. L'angle *boc* étant de 60°, on aura

$$oc = \tfrac{1}{2} bo = \tfrac{1}{2} m \cdot ho,$$

$$bc = \sqrt{(bo)^2 - (oc)^2} = \sqrt{m^2 \cdot (ho)^2 - \tfrac{1}{4} m^2 \cdot (ho)^2}$$

$$= m \cdot ho \sqrt{\tfrac{3}{4}},$$

$$eh = ho - oc = ho - \tfrac{1}{2} m \cdot ho = \frac{2 - m}{2} \cdot ho;$$

donc

$$ho = \frac{2 \cdot eh}{2 - m}.$$

Mettant cette valeur à la place de *ho* dans l'équa-

$\ldots = sc$

Soit $sz = ra'$, r étan
minerons plus bas : n

$ca =$

Or, les triangles semb

$ca : sc :: ua : bc$, ou ra

d'où l'on tire

$$ua = \frac{\quad}{(3r}$$

D'une autre part, il
$ch = \sqrt{\frac{1}{3}g'}$, on a

donc $hg :$

$$ha : ua :: p' : \frac{3r \cdot g'm}{(3r+1)(a-m)} :$$

168. Soit

nales obliques de molécule qu'il y a d'arêtes de molécule contenues dans $ah+au$, et uz répond à autant de diagonales horizontales de molécule qu'il y a d'arêtes de molécule comprises dans ..... $um=am-au=ah-au$. Donc

$$hz : uz :: (x+y)p' : (x-y)g';$$

donc

$$x+y : x-y :: (3r+1)(2-m) : 3r.m.$$

Mais $x : y$ comme la somme des quantités $x+y$ et $x-y$ est à leur différence; donc nous aurons aussi

$$x:y::(3r+1)(2-m)+3r.m:(3r+1)(2-m)-3r.m$$
$$::6r-m+2 : 6r-m+2-6mr.$$

Or, la quantité m, qui exprime le rapport entre bo et ho (fig. 115) est évidemment une quantité rationnelle, puisque ces deux lignes sont en rapport commensurable avec la diagonale g; d'une autre part, le noyau hypothétique étant une des formes secondaires dérivées du générateur, son axe a' est en rapport commensurable avec l'axe a du générateur, et par conséquent la quantité r qui exprime le rapport entre sz et a' est aussi une quantité rationnelle; donc le rapport entre x et y sera toujours lui-même un rapport rationnel. Dailleurs on a

$$n=\frac{Ny+x+y}{Nxy}\text{ (p. 449)},$$

expression dans laquelle tout est rationnel. Donc, il y aura toujours une loi admissible de décroissement, en vertu de laquelle le dodécaèdre pourra être produit par le générateur.

169. Déterminons maintenant r et m.

1°. Pour r. Soit $adeu$ (fig. 117) la coupe principale du générateur, et ag, pg, gu, quatre arêtes du dodécaèdre, situées dans le même plan que adg. Nous aurons

$$gn : np :: ch(\text{fig. } 115) : a \qquad \sqrt{\tfrac{1}{16}g'^2} : \frac{a'}{3}(3r+1)$$

$$:: \sqrt{\tfrac{4}{36}g^2} : an+ap=\tfrac{1}{3}a+\frac{1}{N-1}\cdot a=\frac{N+2}{3N-3}\cdot a.$$

D'où l'on tire

$$g' : a'(3r+1) :: 2g : \frac{N+2}{N-1}\cdot a, \text{ et } r=\frac{N+2}{2(3N-3)}\cdot\frac{ag'}{ga'}-\tfrac{1}{3}.$$

2°. Pour m. Ayant prolongé gn (fig. 117) jusqu'à la rencontre de dp, nous aurons

$$gn : kn :: ho(\text{fig. } 115) : bo :: ho : m\,.\,ho :: 1 : m.$$

D'une autre part,

$$gn : kn(\text{fig. } 117) :: dr : kn :: pr : pn :: \tfrac{1}{3}a+\frac{1}{N-1}\cdot a$$

$$:\tfrac{1}{3}a+\frac{1}{N-1}\cdot a :: 2N+1 : N+2;$$

donc

$$1 : m :: 2N+1 : N+2,$$

ce qui donne

$$m=\frac{N+2}{2N+1}.$$

170. Supposons maintenant que *hs* (fig. 115) soit une des arêtes les moins saillantes. On aura toujours

$$x : y :: 6r - m + 2 : 6r - m + 2 - 6mr.$$

Mais dans le calcul relatif à la détermination de r, nous aurons au lieu de $gn : np$(fig. 117) $:: ch : sc$ (fig. 115),

$$dr : pr\text{(fig. 117)} :: ch : sc\text{(fig. 115)} :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g^2} : \tfrac{a'}{3}(3r+1)$$

$$:: \sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : ar + ap\text{(fig. 117)} = \tfrac{1}{3}a + \frac{1}{N-1}.a = \frac{2N+1}{3N-3}.$$

Donc

$$g' : a'(3r+1) :: 2g : \frac{2N+1}{N-1};$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{2N+1}{2(3N-3)} \cdot \frac{ag'}{ga'} - \frac{1}{3};$$

quantité qui ne diffère de la première que par la substitution de $2N+1$ à $N+2$ dans le numérateur du premier terme

D'une autre part, dans le calcul relatif à la détermination de m, nous aurons $dr : r\pi$ ou au prolongement de dr jusqu'a la rencontre de celui de pg

$$:: ho \text{ (fig. 115)} : bo;$$

ou

$$gn : r\pi :: ho : bo \text{ (fig. 115)} \quad ho : m \,.\, ho :: 1 : m.$$

D'une autre part,

$$gn : r\pi \text{ (fig. 117)} :: pn : pr :: \tfrac{1}{3}a + \frac{1}{N-1}.a : \tfrac{1}{3}a + \frac{1}{N-1}.a$$

$$:: N+2 : 2N+1;$$

donc

$$1 : m :: N+2 : 2N+1 ;$$

d'où l'on tire

$$m = \frac{2N+1}{N+2},$$

quantité qui est le renversement de la première.

171. Les formules précédentes se rapportent immédiatement, ainsi que je l'ai dit, aux décroissemens intermédiaires sur E, dans lesquels x coïncide avec D et y avec B. Mais elles ont cet avantage, que quand on y a substitué, à la place de a, g, a', g', N, leurs valeurs numériques, elles font connaître si elles continuent de s'appliquer à l'espèce de décroissement dont je viens de parler, ou si c'est un autre décroissement qui est le sujet du problème, et de plus elles indiquent ce décroissement. Tout ce qui regarde ces diverses applications dont elles sont susceptibles est renfermé dans les quatre règles suivantes, qui se déduisent des changemens que subissent x et y dans le passage des formules relatives aux décroissemens sur E, dans lesquels x coïncide avec D, à celles qui concernent les autres décroissemens. Pour plus grande simplicité, je représenterai par le rapport de s à t celui des quantités numériques qui répondent à

$$6r - m + 2 \text{ et } 6r - m + 2 - 6mr,$$

en sorte que, par l'hypothèse, on aura en général,

$$x : y :: s : t.$$

1°. Si s est plus grande que t, et si l'une et l'autre sont positives, le décroissement aura lieu sur E, x étant dans le sens de D, et il n'y aura aucun changement à faire au rapport de s à t.

2°. Si s est plus petite que t, auquel cas l'une et l'autre seront encore positives, le décroissement aura lieu sur E, x étant dans le sens de B, et y dans le sens de D; alors on renversera le second rapport, en faisant $x : y :: t : s$.

3°. Si t est négative, ce sera l'indice d'un décroissement sur e. Dans ce cas, on se bornera à changer le signe de t.

4°. Si s est négative, le décroissement aura lieu sur A. Alors on mettra s à la place de t, et $-t$ à la place de s, c'est-à-dire qu'au lieu de $x : y :: -s : t$, on fera $x : y :: t : s$. Je vais faire quelques applications relatives à ces différens cas.

172. Supposons d'abord que le générateur étant le rhomboïde primitif de la chaux carbonatée, et le dodécaèdre étant le résultat du décroissement $\dot{D}^3$, on prenne pour noyau hypothétique un rhomboïde semblable à la chaux carbonatée équiaxe, et que l'on demande la loi du décroissement intermédiaire en vertu de laquelle ce noyau produirait le dodécaèdre, avec la condition que les arêtes les plus saillantes de ce dernier fussent tournées vers les faces du même noyau.

Nous aurons $g = \sqrt{3}$, $a = 3$, $N = 3$, $g' = \sqrt{12}$, $a' = 3$

donc le decroissem
dans le sens de D,

$n =$

donc il a lieu par u
Il existe une vari
nommée *isométriqu*
dans laquelle les face
croissement D̊ se com
noyau hypothétique,
sont dominantes, imp
de ce noyau. Ainsi le

Si l'on cherche, à l'
les incidences respectiv
on trouvera pour celle
155° 44′ 29″, et pour

dans le même état, la seule différence consiste en ce que le noyau hypothétique soit placé de manière que ses faces correspondent aux arêtes les moins saillantes du dodécaèdre. Dans cette hypothèse, on aura

$$r = \frac{2N+1}{2(3N-3)}\frac{ag'}{gg'} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}\,;\quad m = \frac{2N+1}{N+2} = \frac{7}{5}\,;$$

et

$$x : y :: 6r+2-m : 6r+2-m-6mr :: 4 : -1\,;$$

ce qui indique un décroissement sur l'angle e.

On fera donc $x=4$, $y=1$. Mais $N=3$. Donc la formule $n = \frac{Nx-Ny-y}{xy}$ (p. 498) deviendra $n=2$. On pourra vérifier ce résultat, en supposant que le rhomboïde équiaxe fasse la fonction de générateur, et en cherchant dans cette hypothèse le rapport entre les demi-diagonales g' et p' du noyau hypothétique. Faisant donc $g=\sqrt{12}$, $a=3$, $n=2$, $x=4$, $y=1$, on aura (p. 497)

$$g' : p' :: g : \sqrt{\frac{\frac{1}{9}a^2(nxy-x+2y)^2}{nxy-x-y}} :: \sqrt{12} : \sqrt{8} :: \sqrt{3} : \sqrt{2}\,,$$

ainsi que cela doit être, puisque c'est le rhomboïde primitif de la chaux carbonatée qui est censé faire la fonction de noyau hypothétique.

176. Prenons pour générateur un rhomboïde dans lequel on aurait $g=\sqrt{48}$, $p=\sqrt{17}$, ce qui donne $a=3$. Supposons de plus $N=4$, et proposons-nous de déterminer la loi en vertu de laquelle

$$r = \frac{N+2}{2(3N-3)} \cdot \frac{ag'}{ga'} -$$

D'après cela, on tro
(p 537) $x : y :: -1 :$
ment sur A. Ainsi
La formule relative à

$$n = \frac{Nx}{}$$

Ces résultats ne sont
de ceux qui ont été exp
quels le rhomboïde de re
teur, tandis que celui qu
le rapport de $\sqrt{48}$ à $\sqrt{1}$
hypothétique.

177. Pour faire une
sissons le dodécaèdre résul
faces λ, λ (fig. 118)

la même substance, et si nous lui donnons sa position naturelle, relativement au générateur, il est facile de voir que ses faces seront tournées vers les arêtes les plus saillantes, telles que e, du dodécaèdre.

Cela posé, nous aurons $g=\sqrt{3}$, $a=3$, $N=3$, $g'=\sqrt{3}$, $a'=6$; donc

$$r=\frac{N+2}{2(3N-3)}\cdot\frac{ag'}{ga'}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{9}, \text{ et } m=\frac{N+2}{2N+1}=\frac{5}{7}.$$

Donc la proportion $x:y::6r-m+2:6r-n+2-6mr$ deviendra $x:y::1:2$, d'où l'on conclura que le décroissement intermédiaire agit sur les angles E du rhomboïde inverse, de manière que x coïncide avec B, et y avec D. Faisant donc $x=2, y=1$, nous aurons

$$n=\frac{Nx+x+y}{Nxy}\text{ (p. 485)}=\frac{3}{4}.$$

178. Tout restant d'ailleurs dans le même état, substituons au dodécaèdre qui résulte du décroissement $\grave{D}$, le métastatique dont le signe est $\acute{D}$, auquel cas nous aurons $N=2$.

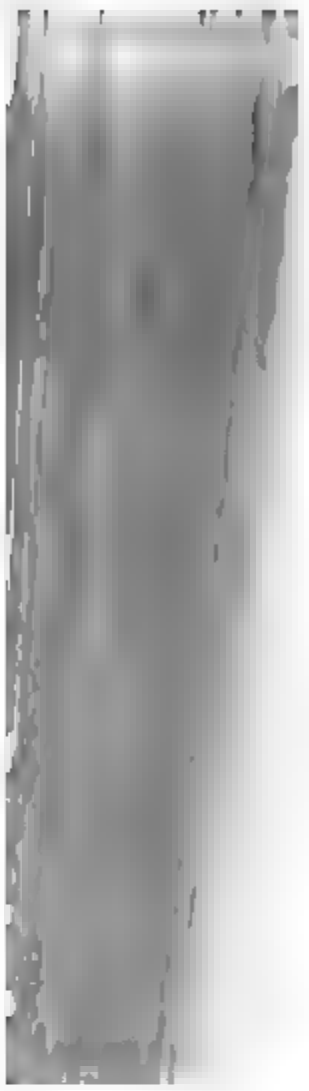
Dans cette hypothèse, on trouve

$$r \text{ ou } \frac{N+2}{2(3N-3)}\cdot\frac{ag'}{ga'}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0,$$

ce qui fait connaître que, dans ce cas, on a aussi

$$sz \text{ (fig. 115)}=0;$$

d'où il suit que le point z se confond avec le sommet s, et que la diagonale du noyau hypothétique est pa-



...s où x,

mule $n = \frac{Nx + x + 2}{Nxy}$

cas où x est dans le s

neront $n = 2$.

Nous avons présen

blème, sous une autre f

la loi en vertu de laq

tique serait produit par

les faces seraient paralle

lantes de ce dodécaèdre.

la valeur de n l'unité, c'

double de celle que nous v

désignait le nombre des di

qu'ici il indique le nomb

179. Les résultats pré

ployés avec avantage pour

détermination des formes q

natée équiaxe, ce qui est d'autant plus aisé que l'on peut mesurer immédiatement les incidences des faces de ce rhomboïde. On cherchera la loi de décroissement en vertu de laquelle le dodécaèdre auquel appartiennent les faces γ, γ, serait produit par le rhomboïde dont il s'agit. Cette loi, comme nous l'avons vu, a pour exposant $\frac{5}{3}$. On considérera ensuite le même rhomboïde comme étant le générateur, et le rhomboïde primitif comme étant le noyau hypothétique, et appliquant ici les formules qui donnent le rapport entre x et y (p. 539), et les valeurs de m et de r, dans le cas où le dodécaèdre tourne ses arêtes les plus saillantes vers les faces du noyau hypothétique, on fera $g = \sqrt{12}$, $a = 3$, $N = \frac{5}{3}$, $g' = \sqrt{3}$, $a' = 3$, ce qui donnera $r = \frac{1}{4}$, $m = \frac{11}{13}$, et $x : y :: 3 : 2$. Mettant à la place de N, x et y, leurs valeurs numériques, dans la formule $n = \frac{Ny + x + y}{Nxy}$, on trouvera $n = \frac{5}{6}$, et l'on sera ainsi parvenu par une méthode indirecte, mais expéditive, à un résultat qui aurait pu exiger de longs tâtonnemens, si l'on avait cherché immédiatement la loi du décroissement intermédiaire.

De diverses formes secondaires dérivées du rhomboïde.

Parmi les nombreuses variétés de formes originaires du rhomboïde, que nous offre la cristallisation, surtout dans l'espèce de la chaux carbonatée, j'ai choisi, pour les résultats que j'avais à exposer,

propriétés qui metten
ties, soit entre elles,
marquables par leur
offrent des angles droit
Les figures 121 et 122 r
le signe rapporté au no

limite géométrique est c
où toutes les faces sont
arrive assez souvent que l
vement plus d'étendue qu
diverses modifications acc
l'on voit (fig. 122) le cris
dans le sens de son axe, un
les trapézoïdes c, c' (fig. 121

Les différentes faces qui c
cette variété sont situées si s
connaiss

du cristal ramené à sa limite, et ensuite les incidences des faces d'un ordre sur celles de l'ordre voisin.

Soit *criz* (fig. 123) une des faces verticales *c* (fig. 121), *cγpr*, *cεsz* (fig. 123) deux des faces *r* (fig. 121) qui appartiennent au cristal métastatique, et *γcεm* (fig. 123) une des faces *g* de l'équiaxe. Soient de plus *dof*, *qof*, *duf*, *quf* (fig. 123) quatre faces du cristal métastatique supposé complet. Menons l'axe *ou*, les deux diagonales *ci*, *rz* du trapézoïde *criz*, la grande diagonale *γr* du trapézoïde *cγpr*, et les deux *cμ*, *γε* du trapézoïde *γcεμ*.

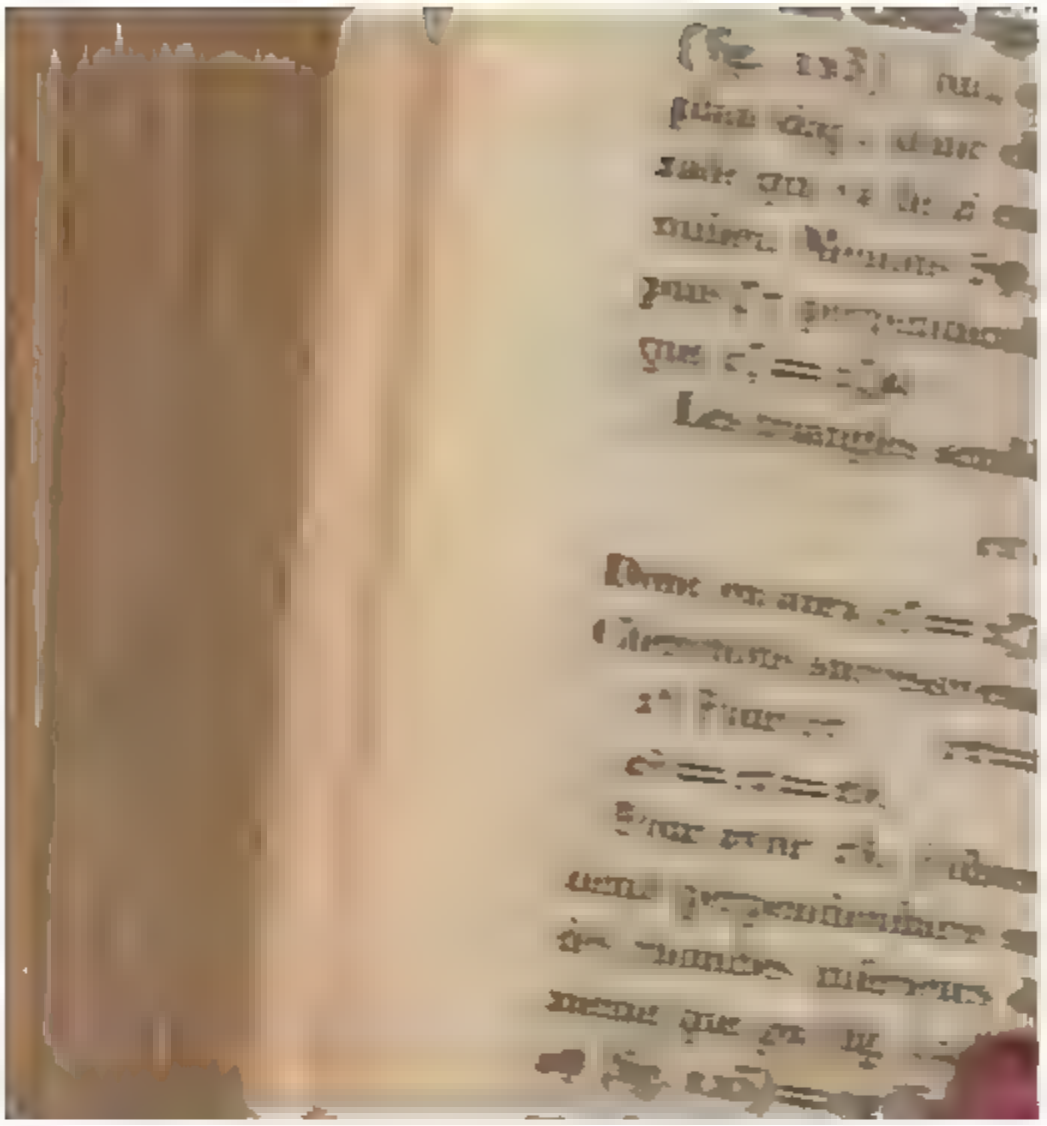
Commençons par *criz*. Les points *r*, *z* étant situés au milieu des arêtes *df*, *qf*, qui sont communes au cristal métastatique et au noyau, il est évident que $rz = g = \sqrt{3}$.

Donc $rh = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Soit *h* (fig. 124) le même point que figure 123. Si nous menons *hc* parallèle à l'axe, cette ligne sera aussi la même que figure 123. Or, le point *h* (fig. 124) est situé au $\frac{1}{4}$ de la diagonale oblique *ft*; donc $fh = \frac{1}{4}p$. Mais $fh : ft :: hc : to$. De plus $to = 2a = 6$; donc la proportion devient

$$\tfrac{1}{4} : 2 :: hc : 6;$$

donc $hc = \frac{3}{4}$; donc (fig. 123) $rh : hc :: \sqrt{\frac{3}{4}} : \frac{3}{4} :: 1 : \sqrt{3}$; donc le triangle *rcz* est équilatéral.

D'une autre part, *hi* (fig. 124) est égale à la même ligne (fig. 123), et en comparant les triangles semblables *fhi*, *ftu*, on en conclura que $hi = \frac{1}{4}tu = \frac{3}{4}$; de hi (fig. 123) $= \frac{1}{4}hc$. D'après ces données on



De plus, $\vartheta\varphi$ (fig. 125) $= \sqrt{\frac{1}{3}g^2} = 1$. Maintenant, es triangles semblables $o\sigma\lambda$, $o\varphi\vartheta$ donnent

$$o\sigma : \sigma\lambda :: o\varphi : \varphi\vartheta :: 5 : 1.$$

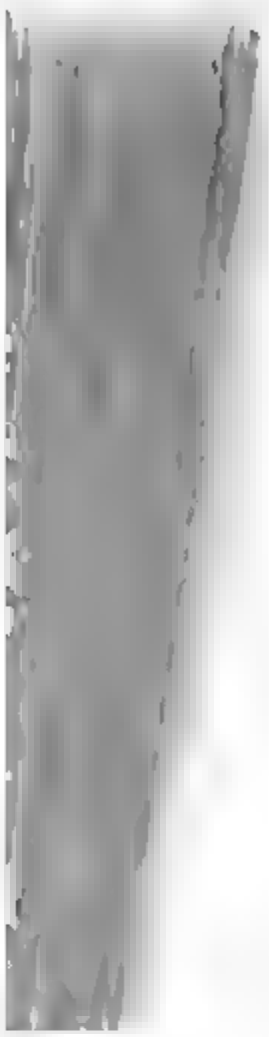
Reste à chercher $o\sigma$. Si du point o (fig. 124) nous menons une perpendiculaire sur l'axe, elle tombera à l'extrémité a de cet axe. Car $cf = \frac{1}{4}of$; donc, puisque ca est parallèle à fr, la distance ar sera $\frac{1}{4}$ de or. Donc $ar = \frac{1}{3}ao$, d'où il suit que l'extrémité a de la perpendiculaire se confond avec celle de l'axe du noyau. Donc, puisque la ligne $c\sigma$ (fig. 125) correspond à ca (fig. 124), le point σ (fig. 125) est tellement situé, que $o\sigma$ est l'excès de l'axe du métastatique sur celui du noyau; donc $o\sigma = 3$; donc la proportion $o\sigma : \sigma\lambda :: 5 : 1$ devient $3 : \sigma\lambda :: 5 : 1$; donc $\sigma\lambda = \frac{3}{5}$.

Cherchons maintenant $o\sigma$ ou son égale ac (fig. 124). $or : fr :: ao : ac$, ou $4 : 2 :: 3 : ac = \frac{3}{2} = c\sigma$; donc l'équation $c\lambda = c\sigma - \sigma\lambda$ devient $c\lambda = \frac{3}{2} - \frac{3}{5} = \frac{9}{10}$.

Reste à chercher $\lambda\tau$. Les triangles $c\tau\zeta$ et $c\sigma\mu$ donnent $c\tau : \tau\zeta :: c\sigma : \sigma\mu$, ou $c\lambda + \lambda\tau : \tau\zeta :: c\sigma : \sigma\mu$. Or, d'une part, $\tau\zeta = 5\lambda\tau$, parce que ces quantités sont proportionnelles à $o\sigma = 3$ et $\sigma\lambda = \frac{3}{5}$.

D'une autre part, appelant g' et p' les deux demi-diagonales de l'équiaxe, on a

$$c\sigma : \sigma\mu :: \sqrt{\tfrac{1}{36}g'} : \tfrac{1}{3}\sqrt{9p'^2 - 3g'^2} :: \sqrt{\tfrac{1}{3}.12} : \tfrac{1}{3}\sqrt{9.5 - 3.12}$$
$$:: \sqrt{4} : \sqrt{1} :: 2 : 1.$$



2°. Pour $\tau\sigma$.

$\tau\sigma = c\sigma - c\lambda -$

Donc $c\tau = 2\tau\sigma$; d

prouver. Maintenar

$\zeta\mu$ (fig. 1

nous aurons

$\alpha\zeta : \gamma\zeta :: \nu$

ce qui est précisém

demi-diagonales du

deux triangles $\epsilon\mu\gamma$, ϵ

et l'autre à l'inverse;

ces triangles ont entre

hauteurs ch, ih des t

pézoïde $ircz$.

Passons au trapézoïc

les expressions des trois

1° Pour

Donc $\gamma\zeta = \sqrt{\frac{3}{4}}$; donc $c\gamma = \sqrt{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{2}$.

2°. Pour *cr*.

$$cr = \sqrt{(ch)^2+(hr)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}.$$

3°. Pour γr. Si l'on fait passer par la ligne $\gamma 6$ un plan perpendiculaire à l'axe, ce plan coupera l'axe au point ν (fig. 125.) Cherchons la valeur de $o\nu$. Nous avons

$$o\nu = o\sigma - \sigma\nu = o\sigma - \tau\zeta = o\sigma - 5\lambda\tau = 3 - \frac{5}{10} = \frac{5}{2}.$$

Or, l'axe $ou = 9 = \frac{18}{2}$. Donc le point γ (fig. 123) qui est à la hauteur du point ν (fig. 125) se trouve situé vis-à-vis les $\frac{5}{18}$ de l'axe. Mais le point d (fig. 123 et 124) est situé vis-à-vis les $\frac{5}{9}$ de l'axe, puisque... $pg = 5$; donc le point γ (fig. 123) est au milieu de l'arête od. Mais le point r est au milieu de l'arête df. Donc

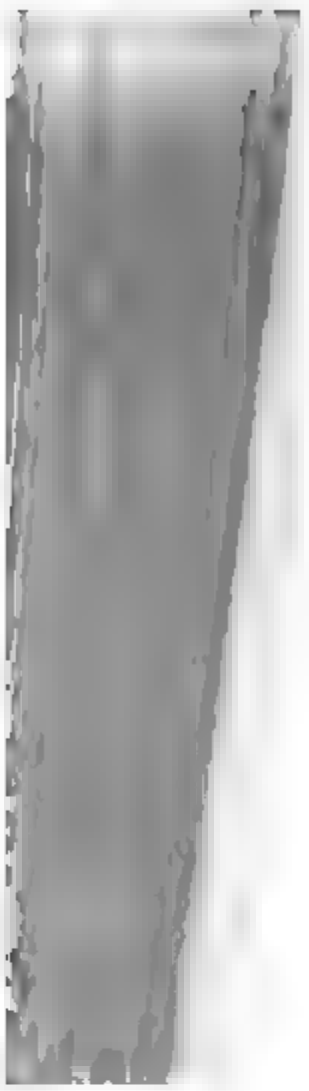
$$\gamma r = \tfrac{1}{2} of = \tfrac{1}{2}\sqrt{(or)^2+(fr)^2} \text{ (fig. 48)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{16+4} = \sqrt{5}.$$

D'ailleurs, $cr = \sqrt{3}$ et $c\gamma = \sqrt{2}$. Concluons de là : 1°. que l'angle γcr est droit; 2°. que le triangle γr est semblable et égal au quart d'une des faces du noyau divisée par les deux diagonales.

Ayant déjà l'angle γcr de 90^d, cherchons encore les angles γpr et $c\gamma p$.

1°. Pour l'angle γpr. Cet angle est le supplément de dpr. Or, dans le triangle rpd, nous connaissons $dr = \frac{1}{2} df = \frac{1}{2}\sqrt{5}$. De plus,

$$pr = ir = \sqrt{(rh)^2+(ih)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{10}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{21}.$$



"$\gamma'' = 32^{u}\ 34'\ 7''$, d'où

2°. Pour l'angle $c\gamma$
deux angles $c\gamma r$ et $p\gamma r$
de l'angle obtus du r
qu'il est de $50^{d}\ 46'\ 6''$.
sera facile d'après la conn
de $pr = \frac{1}{4}\sqrt{21}$, et de $\gamma r =$
laquelle valeur ajoutée à
pour l'angle $c\gamma p$. Le qua
de $67^{d}\ 47'\ 37''$.

Nous avons encore à dét
sur $czir$, et celle de $c\gamma\mu$

1°. Pour l'incidence de
Soit rcz (fig. 126) le m
Menons cn (fig. 126) situé
tellement prolongée, que le
son extrémité soient perpe
nous aussi ch, [illegible]

de l'angle *nga* (fig. 126). Déterminons successivement *ng* et *na*.

1°. Pour *na*. A cause du triangle rectangle *cnh*,

$$na = \frac{cn \times hn}{ch}.$$

$ch = \sqrt{\frac{9}{4}}$. $rh : hn :: \sqrt{5} : \sqrt{3}$, parce que l'angle *nrz* mesure la plus petite incidence des faces du cristal métastatique. Mais $rh = \sqrt{\frac{1}{4}}$; donc

$$hn = \sqrt{\tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{3}{5}} = \sqrt{\tfrac{9}{20}}; \quad cn = \sqrt{(ch)^2 - (hn)^2}$$
$$= \sqrt{\tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{20}} = \sqrt{\tfrac{9}{5}}.$$

Donc

$$na = \frac{\sqrt{\frac{9}{5} \times \frac{9}{20}}}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \sqrt{\tfrac{9}{25}}.$$

2°. Pour *ng* . $ng = \frac{cn \times nr}{cr}$.

Nous avons déjà $cn = \sqrt{\frac{9}{5}}$;

$$nr = \sqrt{(rh)^2 + (hn)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{9}{20}} = \sqrt{\tfrac{6}{5}};$$
$$cr = \sqrt{(ch)^2 + (rh)^2} = \sqrt{\tfrac{9}{4} + \tfrac{1}{4}} = \sqrt{3};$$

donc

$$ng = \frac{\sqrt{\frac{9}{5} \times \frac{6}{5}}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{18}{25}}.$$

Donc $ng : na :: \sqrt{18} : \sqrt{9} :: \sqrt{2} : 1$. D'où il suit que $nga = 45^d$; et par conséquent l'incidence de *cγpr* sur *czir* est de 135^d.

2°. Pour l'incidence de *cγμε* (fig. 123) sur *cγpr*.

Soit *γcε* (fig. 127) le même triangle que fig. 123.

Cherchons successiv

1°. Pour $\nu\lambda$. $\nu\lambda =$

Nous avons trouvé

$$c\nu =$$

et nous avons eu aussi

Or,

$$\lambda\zeta : \zeta$$

Donc $\zeta\nu = \sqrt{\frac{9}{20}}$; donc

$$\lambda\nu = \sqrt{(\lambda\zeta)^2 + (\zeta$$

donc

$$\nu\lambda = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{}}$$

2°. Pour $\nu\pi$

$$\nu\pi = \frac{c\nu \times \zeta\nu}{c\zeta}, \quad c\pi = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

donc

ce qui est le rapport entre le côté du rhombe primitif et la moitié de la diagonale horizontale. Donc l'angle $\nu\lambda\pi = \frac{101^d 32' 13''}{2} = 50^d 56' 6''$; d'où il suit que l'incidence de $c\gamma\mu\iota$ (fig. 123) sur $c\gamma pr$ est de $129^d 13' 54''$.

181. Une seconde variété qui est représentée figure 128, et dont le signe est $\overset{2}{e}\overset{3}{e}\overset{4}{\mathrm{D}}_{c\,m\,n}$, a été appelée *ascendante*, parce que les trois lois dont elle dépend suivent la marche indiquée par ce nom, en partant des angles et des bords inférieurs du générateur (1). Voici les mesures de ses angles saillans. Incidence de c sur c', 120^d; de c sur m, ou de c' sur m', $165^d 51' 49''$; de m sur m', $114^d 18' 56''$; de n sur n, $161^d 48' 18''$; de n sur la face de retour, $101^d 32' 13''$.

Cette dernière incidence est égale à l'angle au sommet du rhombe primitif. Je vais prouver que cette égalité peut avoir lieu relativement à tous les rhomboïdes obtus dans lesquels les carrés des expressions des demi-diagonales sont des quantités rationnelles, quelles que soient d'ailleurs les mesures de leurs angles, en sorte que la loi qui la donne dépend, pour chaque rhomboïde, du rapport entre les diagonales dont il s'agit.

Il est d'abord facile de voir que le sinus de la moitié de l'incidence égale à l'angle du rhombe pri-

(1) J'ai déjà indiqué, p. 340, celle de ces lois qui donne les faces n, n.

riables,

$$n^2 + n\left(\frac{4p^4 - 4}{g^4 - 2g^2 +}\right.$$

ou en simplifiant,

$$n^2 - \frac{n \cdot 4p^2}{g^2 - p^2}$$

Extrayant la racine

$$n =$$

ce qui donne

$$n =$$

182. Il y a une mani
démontrer la même pr
l'observation que quand
deux faces du dodécaè
(fig. 17, pl. 16), est égal

par conséquent les triangles *dpf*, *qpf* sont perpendiculaires sur le plan du rhombe *dfqs*.

Soit toujours *amhl* (fig 19) la coupe transversale du générateur, prise par un plan perpendiculaire aux arêtes *ab*, *df* (fig 17). La ligne *mt* (fig. 19) étant perpendiculaire sur le prolongement de *la*, coïncidera avec la face *dpf* (fig. 17) du dodécaèdre. Soit *mou* (fig. 19) le triangle mensurateur, *d* la dimension qui sur la molécule répond à *am*, et *n* le nombre de rangées soustraites. La ligne *at* étant le cosinus du petit angle du rhombe primitif, nous aurons

$$om : ou :: d \times n : d :: am : at :: 2p^2 : g^2 - p^2 \text{ (p. 392)},$$

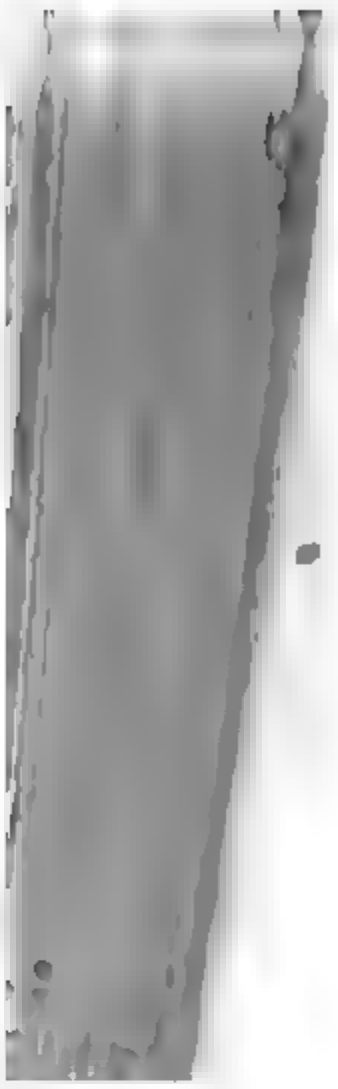
ou

$$n : 1 :: 2p^2 : g^2 - p^2;$$

donc

$$n = \frac{2p^2}{g^2 - p^2}.$$

Ainsi la valeur de *n* est égale au rapport qui représente la valeur du cosinus du petit angle du rhombe primitif. Nous avons déjà vu que les valeurs correspondantes relativement à d'autres formules qui généralisent la propriété du dodécaèdre métastatique (p. 330) et du rhomboïde inverse (p. 399), dépendaient du même rapport, en sorte que celui-ci sert à lier toutes ces propriétés doublement intéressantes, soit en elles-mêmes, soit par leur réunion autour d'un point commun de ralliement.



a-dire d'une forme
être ramenée à celle d

Lorsque g est égale

a $n=\frac{2}{o}$, c'est-à-dire

sorte que le dodécaèdr
teur. Passé cette limite

rhomboïde aigu, on a

qu'alors la valeur de n de

184. La figure 129 re

de chaux carbonatée dont

Je lui ai donné le nom d'
faces $\downarrow$ et n, dont l'une rés
intermédiaire, et l'autre d'
ont été produites, pour

caèdre semblable à celui auquel appartiennent les faces y, y (fig. 130) de la variété diennéaèdre, lesquelles dépendent du décroissement $\overset{3}{6}\breve{D}$.

Pour démontrer la relation qui existe entre les deux décroissemens, supposons que *pu* (fig. 130) représente le dodécaèdre dont il s'agit. Il est évident que, dans l'hypothèse du décroissement $\overset{3}{6}\breve{D}$, le générateur tournera ses faces vers les arêtes les moins saillantes, telles que γ. Mais dans le dodécaèdre qui résulterait du prolongement des faces $\downarrow, \downarrow$ (fig. 129), ce seraient au contraire les arêtes les plus saillantes, telles que ε (fig. 130), qui répondraient aux faces du générateur (1). Ainsi la question se réduit à chercher la loi de décroissement intermédiaire en vertu de laquelle le générateur, considéré comme noyau hypothétique, produirait le dodécaèdre, avec la condition que les arêtes ε fussent tournées vers les faces de ce noyau.

En appliquant ici les formules que nous avons données ci-dessus (p. 538), nous aurons

$$a=3,\ g=\sqrt{3},\ \mathrm{N}=\tfrac{3}{5},\ a'=3,\ g'=\sqrt{3},$$

ce qui donnera

$$r=\tfrac{5}{6},\ m=\tfrac{7}{8},\ \text{et}\ x:y::7:2.$$

(1) Dans le cas présent, ces arêtes sont celles qui naîtraient de l'intersection des faces ψ, ψ, situées en avant.

...rpar...nnen
d'abord le rapport en
du rhomboïde dont il
Soit toujours *adsg*
générateur, et *dp* une
du dodécaèdre. Nous

$$ap \text{ ou } \frac{1}{N-1}$$

donc

$$pr$$

Mais

$$dr : pr ::$$

donc

$$g' : \sqrt{3p'^2}.$$

ou

$$g'^2 : 3p'^2 -$$

d'où l'on tire

$$g' : p' :: \sqrt{}$$

ce qui in...

saillantes, et par conséquent les faces du rhomboïde sont tournées vers les bords supérieurs du véritable générateur, d'où il suit que le rhomboïde est produit par renversement sur les angles inférieurs de ce générateur, et que la loi qui le donne a pour exposant $\frac{7}{10}$, comme je l'ai démontré (p. 378). Ainsi le décroissement a lieu par 7 rangées en largeur et par 5 en hauteur, comme l'indique le signe. J'ajouterai ici les mesures des principaux angles du cristal. Incidence de c sur c, 120^d; de c sur u, 150^d; de ψ sur ψ, 108^d 56′ 2″; de ψ sur ψ', 134^d 25′ 2″; de n sur n, 65^d 41′ 4″; de n sur ψ, 157^d 12′ 31″; de t' sur t', 137^d 39′ 26″; de t sur t', 159^d 11′ 34″.

185. La variété qui va maintenant nous occuper appartient au fer oligiste. La fig. 131 la représente, et son signe rapporté au noyau (fig. 132) est.....

$\dot{D}PE^{3}_{3}E''EA$. Je la nomme *fer oligiste soustractif*,

$k\,P\quad n\quad u\quad \dot{s}$

parce que l'exposant 3 de la loi qui donne les faces n est moindre d'une unité que la somme 4 des autres exposans. En examinant son signe, on concevra que sa surface est composée de six faces verticales k, k, situées comme les pans d'un prisme hexaèdre régulier; de douze autres faces n, n, n', n', qui étant prises six à six et prolongées jusqu'à se rencontrer par leurs parties supérieures, formeraient deux pyramides droites dont les bases se confondraient avec celles du prisme; de six pentagones P, P, parallèles aux faces du noyau, de six autres s, s, placés trois

à trois aux extrémités du cristal, et enfin de six quadrilatères *u* qui interceptent les angles solides à la rencontre des faces *k* et *n*. J'ai à prouver que ces dernières facettes sont des rhombes, et que leur figure symétrique peut avoir lieu dans une infinité de cas, sous une condition qui diffère de celle à laquelle est soumise la même figure dans la variété euthétique de chaux carbonatée (p. 505). Voici en quoi elle consiste :

Soient *bxqz* (fig. 133), *qztl*, etc., six faces verticales analogues aux pans d'un prisme hexaèdre régulier, et *pbzy* une pyramide droite qui repose sur la base de ce prisme ; soit de plus *drsk* un quadrilatère qui remplace l'angle solide *t*, et qui ait ses deux bords supérieurs *dr*, *dk*, parallèles aux arêtes *pz*, *py*, de la pyramide. Ce quadrilatère sera un rhombe, quelles que soient les inclinaisons des faces de la pyramide sur la base.

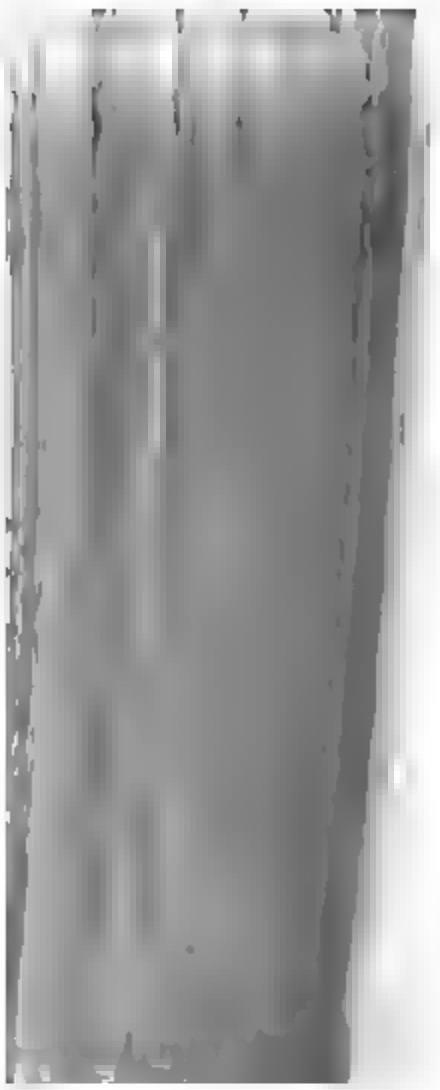
Pour le prouver, je mène le rayon oblique *et* de la base, ensuite *zy*, et je prolonge le plan *zpy*, jusqu'à ce que ses deux sections sur les pans *ztlq*, *ytlu*, se rencontrent en un point *n* de l'arête *tl*. Il est évident que les quadrilatères *drsk*, *pzny*, sont semblables ; il suffit donc de démontrer que le dernier est un rhombe. Si l'on mène *pg* à l'endroit où *et* s'entrecoupent, et qu'on la prolonge indéfiniment, elle passera par le point *n*, puisqu'elle restera toujours dans le plan du quadrilatère *pzny* qui divisera [illegible] parties égales *zn*, *pyn*. Or [illegible] les *g*

sont évidemment semblables; mais de plus $cg = gt$, parce que la base du prisme est un hexagone régulier; donc les deux triangles sont non-seulement semblables, mais égaux; donc $gp = gn$; d'où il suit que le quadrilatère *pzny* est un rhombe, et ainsi du quadrilatère *drsk*.

Or, les bords supérieurs des facettes *u* (fig. 131) étant parallèles aux arêtes que remplacent les faces P, ou, ce qui est la même chose, aux plus longs bords de ces dernières faces, et cela par une suite de ce qu'elles proviennent du décroissement E''E, il en résulte que ces facettes sont aussi des rhombes, et l'on juge aisément que cette figure ne dépend point du rapport entre les diagonales du générateur, mais qu'elle tient uniquement à une combinaison de lois de décroissement d'où résulte le parallélisme dont j'ai parlé. Voici les principaux angles du cristal.:

Incidence de *k* sur *k*, 120^d; de *k* sur *n*, 150^d 26′; de *n* sur *n*, 128^d 28′; de *n* sur *n*′, 120^d 52′; de P sur *n*, 154^d 13′; de P sur *s*, 144^d 8′; de *s* sur *s*, 144^d; de P sur *u*, 128^d 39′.

186. Je n'ajouterai plus qu'une variété que je choisis dans l'espèce du fer sulfaté, non qu'elle offre des propriétés remarquables, mais parce que les décroissemens dont elle dépend agissent à la fois sur ses différentes parties, et ont toutes une même mesure, ce qui est très rare dans les solides dérivés d'un noyau rhomboïdal, qui n'ayant pas un caractère particulier de régularité; comme le cube et l'octaèdre



d'où l'on voit qu
naissance ont lie
angles du rhomb
fer sulfuré pant
gine de toutes l
mesures de ses an
Incidence de P
de P sur *o*, 123d 24
130d 41′; de P ou
Je n'ai point par
primitive est aussi
sieurs variétés int
stance est du noul
trisent par la chaleu
sujet d'un article pa

Formule pour l

des faces qui appartiennent aux formes secondaires simples, produites en vertu d'un seul décroissement par un nombre quelconque de rangées soustraites sur tel bord ou tel angle d'un rhomboïde primitif.

Les surfaces des formes que j'appelle *composées* étant des assemblages de facettes de différens ordres, qui se rencontrent et s'entrecoupent dans différentes directions, la complication qui en résulte semble d'abord écarter l'idée d'étendre à ces formes les avantages qui naissent des formules générales, relativement à la détermination des premières. Il ne reste plus alors que des méthodes particulières, qui ne conduisent au but proposé qu'à travers les détails prolixes d'une opération que l'on est obligé de recommencer tout entière, chaque fois qu'il survient un nouveau problème à résoudre. Ce n'est que depuis peu de temps que j'ai conçu l'idée de généraliser, autant qu'il serait possible, les applications de la théorie à la recherche des angles des formes secondaires composées, et les résultats de mon travail, que je vais exposer, m'ont fait regretter que cette idée ne se soit pas offerte dès le commencement.

Les angles dont il s'agit sont produits par le concours tantôt de deux faces situées sur deux rhomboïdes différens, tantôt d'une face de rhomboïde et d'une autre face qui appartient à un dodécaèdre, tantôt enfin d'une face située soit sur un rhomboïde, soit sur un dodécaèdre, et d'une seconde qui est perpendiculaire ou parallèle à l'axe.

La détermination du premier de ces angles souffre peu de difficulté. C'est vers celle des deux autres angles que j'ai dirigé mes recherches, et je suis parvenu à circonscrire les différens cas auxquels elle se rapporte (1) dans une même formule, qui s'applique directement à l'un d'eux, et n'a besoin que d'être plus ou moins légèrement modifiée, pour donner tout d'un coup la solution du problème dont chacun des autres offre le sujet. Elle m'a même paru mériter d'autant plus d'être publiée, qu'indépendamment de l'avantage qu'elle a d'apporter une économie de temps et de travail dans les applications de la théorie, elle peut être employée au développement de plusieurs propriétés remarquables, que réalisent une partie des formes dont j'ai parlé, et que je ferai bientôt connaître.

188. Mais avant d'exposer cette formule il est nécessaire d'entrer dans quelques détails sur les différens cas auxquels elle peut s'appliquer, et sur les quantités qui m'ont fourni les données d'où je suis parti pour arriver à mon but.

La construction de cette for[illegible]épend du rapport entre trois coordonnées, [illegible] pendiculaire menée d'un de[illegible]

---

(1) [illegible]lus de mon plan le ca[illegible] la r[illegible]ne face de rhomboï[illegible] dicu[illegible]llele à l'axe, parce qu'il [illegible]d'y employer un

du dodécaèdre, pris à volonté, et les deux autres sont les sous-divisions de l'axe situées de part et d'autre de cette perpendiculaire. Je vais indiquer ces coordonnées relativement à chaque cas particulier.

Je supposerai d'abord que les dodécaèdres dont il s'agit aient été produits par les décroissemens ordinaires. Il pourra arriver que ces décroissemens aient eu lieu sur les bords inférieurs du rhomboïde primitif, ou sur ses bords supérieurs ou sur ses angles latéraux. Dans le premier cas on voit, par la seule inspection de la fig. 16, pl. 16, dont nous avons déjà fait usage pour la théorie de l'espèce de décroissement dont il s'agit, que les trois coordonnées sont les lignes dr, pr et ur, qui ont pour expression $\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$,

$\frac{2}{3}a + \frac{a}{n-1}$ ou $a\frac{(2n+1)}{3n-3}$, et $\frac{1}{3}a + \frac{a}{n-1}$ ou $a\left(\frac{n+2}{3n-3}\right)$.

Dans le second cas, $adsg$ (fig. 5, pl. 15) étant la coupe principale du générateur, et $amsp$ celle qui lui correspond sur le dodécaèdre, les trois coordonnées sont mu, au, us, que nous avons représentées algébriquement par les expressions $\frac{n+1}{n}\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$,

$$\frac{2n-1}{3n}a, \text{ et } \frac{n+1}{8n}.$$

La figure a été tracée dans l'hypothèse où le dodé- tournerait ses arêtes les moins saillantes vers du noyau. Alors au est plus grande que us.

Lorsqu'elle est plus petite, ce sont les arêtes les plus saillantes du dodécaèdre qui répondent aux faces du noyau. Mais il n'y a de changé que le rapport entre les expressions des coordonnées, par une suite de ce que la quantité n se trouve diminuée.

Le troisième cas exigera un calcul particulier pour mettre les expressions des coordonnées sous la forme qui convient à la formule. Dans la figure 29, pl. 17, qui est celle dont nous nous sommes servis pour les résultats relatifs aux décroissemens sur les angles latéraux, les lignes *oz*, *px* ne coïncident pas sur une même direction avec les lignes *ln*, *dr*; elles sont situées au-dessus ou au-dessous, suivant que le dodécaèdre tourne vers le noyau ses arêtes les plus saillantes, ou les moins saillantes. Cette différence de position est une suite du parallélisme qui a lieu entre *to* et *ad*. Nous n'avions besoin alors que des expressions de *ln* et *dr*. Mais ici il est nécessaire de chercher celles de *oz* et *dr*, qui sont les véritables coordonnées, prises sur la direction de l'axe.

Soit toujours $as = a$. Nous avons déjà $dr = \sqrt{\frac{4}{36}g^2}$.

De plus,

$$oz : dr :: oi : di ::$$

ou

$$oz : \sqrt{\tfrac{4}{36}g^2} :: a + \tfrac{a}{n} : a + \tfrac{a}{2n} ::$$

donc

$$oz = \tfrac{2n+2}{2n+1}\sqrt{\tfrac{4}{36}}$$

Or, d'une part,

$$tz : oz :: ar : dr :: \tfrac{2}{3}a : \sqrt{\tfrac{4}{36}g^2};$$

donc

$$tz = \frac{oz}{\sqrt{\frac{4}{36}g^2}} \times \tfrac{2}{3}a = \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \tfrac{2}{3}a.$$

D'une autre part,

$$iz : oz :: ir : dr :: \frac{2n+3}{6n}a : \sqrt{\tfrac{4}{36}g^2};$$

donc

$$iz = \frac{oz}{\sqrt{\frac{4}{36}g^2}} \times \frac{2n+3}{6n}a = \frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)\ 6n}a.$$

Dans la figure 29, *tn* est plus petite que *iz*, par une suite de ce que le dodécaèdre tourne ses arêtes les plus saillantes vers les faces du générateur. Si elle était plus grande par une suite du contraire, les expressions des coordonnées resteraient les mêmes : il n'y aurait de changé que leur rapport.

Si le dodécaèdre est produit par un décroissement intermédiaire, on substituera le noyau hypothétique au véritable, et l'on prendra les coordonnées dans la coupe du dodécaèdre qui naîtrait d'un décroissement sur les bords inférieurs de ce noyau hypothétique; ce qui fera rentrer le cas dont il s'agit dans le premier de ceux que nous venons de considérer.

189. Je vais maintenant donner la construction de la formule générale dans laquelle les expressions des trois coordonnées n'ont besoin que d'être remplacées dans chaque cas particulier par leurs valeurs numé-

riques pour conduire à la solution du problème proposé.

Soit $\gamma\mu$ (fig. 136) un dodécaèdre produit par un décroissement ou réel ou hypothétique sur les bords inférieurs ah, bh, etc., d'un noyau rhomboïdal, et dont les sommets soient remplacés par les faces $\gamma\varepsilon\delta\lambda$, etc., et d'un rhomboïde qu originaire du véritable noyau. On propose miner l'incidence de l'une des mêmes fi faces adjacentes r, r, du dodécaèdre. Nou ons ici que ces faces naissent sur les dinales les moins saillantes du même ac

Par les angles a, b, faisons passer un plan asb parallèle à l'axe, et coupons-le par un autre plan agb perpendiculaire au même axe. Soit $acb.g$ (fig. 137) la pyramide donnée par ces plans, et hgk un plan parallèle à la face $\gamma\lambda\delta\varepsilon$ (fig. 136). Menons gp prolongée convenablement, et abaissons sr perpendiculaire sur gk prolongée, puis sz. L'angle szr sera le supplément de l'incidence cherchée.

Soit $odmz$ (fig. 138) la coupe du générateur, et du, dt, deux arêtes longitudinales du dodécaèdre. Les deux lignes ku, kt, seront les coordonnées dont nous avons parlé plus haut, et qui ont pour expressions générales $\frac{2}{3}a+\frac{a}{n-1}$, $\frac{1}{3}a+\frac{a}{n-1}$. Représentons-les, pour abréger, par s et t; et enfin exprimons par m, b, les deux lignes cg, cp, dont le rapport est celui de $g' : \sqrt{3p'^2-g'^2}$, g' et p' étant les

demi-diagonales du rhomboïde dont une des faces est $\gamma\lambda\delta\varepsilon$.

Cela posé, cherchons successivement sr et rz, qui sont l'une le sinus, et l'autre le cosinus de l'angle szr.

1°. Pour sr. Les triangles semblables pcg, prs, donnent $sr : pr :: cg : cp :: m : b$; donc $sr = \frac{m}{b} \times pr$.

Calculons pr.

$$pr : cp :: ps, \text{ ou } cs - cp : gp;$$

donc

$$pr : b :: cs - b : \sqrt{m^2 + b^2};$$

mais

es(fig. 137) : $cg :: ku : dk$(fig. 138), ou $cs : m :: s : \sqrt{\frac{4}{3}g^2}$,

d'où l'on tire

$$cs = \frac{ms}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2}};$$

donc

$$pr : b :: \frac{ms}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2}} - b : \sqrt{m^2 + b^2};$$

ce qui donne

$$pr = \frac{\frac{bms}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2}} - b^2}{\sqrt{m^2 + b^2}}.$$

Multipliant cette valeur de pr par $\frac{m}{b}$, on a

$$sr = \frac{m(ms - b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2(m^2 + b^2)}}.$$

2°. Pour rz.

$$rz : gr :: pk : gk, \text{ d'où } rz = \frac{gr \times pk}{gk}.$$

Or,

$$gr = gp + pr = \sqrt{m^2 + b^2} + \frac{\frac{bms}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2}} - b^2}{\sqrt{m^2 + b^2}}$$

$$= \frac{m(m\sqrt{\frac{4}{3}g^2} + bs)}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2(m^2 + b^2)}}.$$

D'une autre part,

$$pk : cb :: ps : cs, \text{ ou } \quad : g :: cs - b : cs,$$

d'où l'on tire

$$pk = g \times \left(\frac{cs -}{cs}\right) \quad \frac{(ms - b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})}{ms}.$$

De plus,

$$gk = \sqrt{(gp)^2 + (pk)^2} = \sqrt{m^2 + b^2 + \frac{g^2(ms - b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})}{m^2 s^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{m^2 s^2(m^2 + b^2 + g^2(ms - b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})}{m^2 s^2}}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression de rz, on aura

$$rz = \frac{m(ms - b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2(m^2 + b^2)}} + \frac{g(m\sqrt{\frac{4}{3}g^2} + bs)}{\sqrt{m^2 s^2(m^2 + b^2) + g^2(ms - b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})}}.$$

Maintenant, si nous prenons le rapport de sr à rz, simplifié par la suppression des facteurs communs aux deux quantités, nous aurons

$$sr : rz :: \sqrt{m^2 s^2(m^2 + b^2) + g^2(ms - b\sqrt{\frac{4}{3}g^2})} : g(m\sqrt{\frac{4}{3}g^2} + bs).$$

190. Il est aisé d'introduire dans cette formule la

seconde coordonnée t; pour cela, remarquons que le point c (fig. 137) étant situé au milieu de la diagonale oblique du noyau, cs (fig. 137) est la moitié de ap (fig. 16, pl. 16). Or,

$$ap = 2pn - un = 2t - s; \text{ donc } c^s = \frac{2t-s}{2}.$$

Mais nous avons trouvé plus haut $cs = \frac{ms}{\sqrt{\frac{4}{3}g^2}}$; donc

$$ms = \frac{2t-s}{2}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = (2t-s)\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2},$$

et

$$m^2s^2 = (2t-s)^2\tfrac{1}{3}g^2.$$

Si l'on substitue cette valeur de m^2s^2 dans la formule, celle-ci prendra la forme

$$sr : rz :: \sqrt{(2t-s)^2\tfrac{1}{3}(m^2+b^2)+(ms-2b\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2})^2} : 2m\sqrt{\tfrac{1}{3}g^2}+bs \text{ (A) (1).}$$

191. Les faces du rhomboïde, en s'inclinant dans un sens ou dans l'autre, subissent des variations qui se rapportent à certaines limites dont chacune présente sous un nouvel aspect géométrique le cristal qui s'y rapporte. Mais il est facile de conserver à la formule sa généralité, en la modifiant d'une manière assortie à ces variations.

---

(1) Pour faciliter les applications aux différens cas qui peuvent avoir lieu, je désignerai cette formule et les suivantes par les lettres A, B, C.... qui serviront de renvois.

Supposons d'abord que les trois faces situées vers chaque sommet restant fixes par leurs angles inférieurs e (fig. 136) s'abaissent par leurs parties supérieures, en formant entre elles des angles toujours plus ouverts. Il y aura un terme où elles coïncideront sur un même plan perpendiculaire à l'axe, comme on le voit fig. 139. Alors la quantité b s'évanouit, et la formule devient

$$sr : rz :: \sqrt{(2t^2 - \quad} \overline{+3s^2} : 2g \text{ (B)}.$$

192. Concevons maintenant que les mêmes faces se relèvent par leurs parties supérieures, en faisant avec l'axe des angles toujours plus aigus. Leurs diagonales obliques finiront par coïncider avec les arêtes eh (fig. 136) du dodécaèdre, et si l'on suppose qu'ensuite elles se meuvent vers l'axe parallèlement à elles-mêmes, la forme se présentera sous l'aspect d'un dodécaèdre (fig. 140) dans lequel les arêtes longitudinales les moins saillantes seraient remplacées par des hexagones f, f, dont les plus longs bords δ, δ, seraient parallèles. L'incidence de ces faces sur leurs adjacentes dans le dodécaèdre est censée être donnée d'avance, comme étant égale à la moitié de celle de r sur r, plus à 90^d. Mais si l'on voulait appliquer la formule à ce cas, on ferait attention qu'alors le rapport de m à b devient égal à celui de $\sqrt{\frac{1}{16}g^2}$ à s; et par la substitution de ces secondes quantités aux premières, la formule ordinaire se ré-

duirait à

$$sr : rz :: \sqrt{(2t-s)^2 \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{36}g^2+s^2)} : 4\sqrt{\tfrac{1}{36}g^2+s^2}. \quad (a).$$

193. Les faces du rhomboïde continuant de s'incliner dans le même sens, interceptent les angles latéraux du dodécaèdre, en sorte que la forme devient semblable à celle qu'on voit (fig. 141). La construction à laquelle se rapporte la figure 137 se change alors en celle que représente la figure 142, et qui ne diffère de l'autre qu'en ce que le triangle *hsk* y est situé en sens contraire de la position qu'il a dans celle-ci. Le rapport entre les deux côtés de l'angle qui donne l'incidence proposée, est alors celui de $gr : rz$ (fig. 142), et si l'on cherche ce rapport, en assimilant la marche du calcul à celle qui a été suivie à l'égard de la construction de la figure 137, on trouve

$$gr : rz :: \sqrt{(2t-s)^2 \tfrac{1}{3}(m^2+b^2)+(2b\sqrt{\tfrac{1}{36}g^2}-ms)^2} : bs+2m\sqrt{\tfrac{1}{36}g^2}\ (C);$$

lequel rapport est le même que celui qui est indiqué par la lettre (A), excepté que dans celui-ci le second membre du premier terme est $(ms-2b\sqrt{\frac{1}{36}g^2})^2$, où il y a inversion dans les signes.

194. Au-delà du terme précédent, les faces du rhomboïde, en se relevant de plus en plus par leurs parties supérieures, arrivent au parallélisme avec l'axe, et à ce terme la forme présente l'aspect d'un

dodécaèdre dont les faces se combinent avec les pans d'un prisme hexaèdre régulier, produits en vertu du décroissement $\overset{\circ}{e}(1)$, ainsi qu'on le voit fig. 143. Dans ce cas m devient nul, et la formule (C) se change en la suivante :

$$gr : rz :: \sqrt{(2t-s)^2\tfrac{1}{3}b^2+(2b\sqrt{\tfrac{1}{35}g^2})^2} : bs$$
$$:: \sqrt{(2t-s)^2\tfrac{1}{3}+\tfrac{4}{3}g^2} : s$$
$$:: \sqrt{(2t-s)^2+4g^2} : s\sqrt{3}\ (D).$$

On peut remarquer que des deux triangles dont chaque trapézoïde c est l'assemblage, l'un, tel que kln, est tourné vers une face du générateur, tandis que l'autre, ksn, correspond à l'un de ses bords contigus aux sommets. Il en résulte deux incidences différentes d'un même trapézoïde sur les faces adjacentes du dodécaèdre, que l'on détermine à l'aide de la formule, en faisant successivement s plus petite et plus grande que t, ou réciproquement.

195. Il est facile, en faisant subir un léger changement aux formules précédentes, de les rendre suscep-

---

(1) J'omets le cas où les p[illegible]risme résultent du décroissement $\overset{\circ}{D}$, parce que l'[illegible]ont entre elles deux faces du dodécaèdre, telles [illegible]g. 139). [illegible]és des deux cotés d'une même arêt[illegible]tant c[illegible], il suffit d'en prendre la moitié [illegible]ler ac[illegible] cidence de l'une quelconq[illegible]mêmes [illegible] adjacent.

tibles d'être appliquées au cas où le dodécaèdre a pour faces des triangles isocèles ; il suffit de considérer qu'alors les quantités s et t deviennent égales, d'où il suit que, dans le premier terme, il faut mettre s à la place de $2t-s$.

196. Je vais maintenant faire des applications des quatre formules à des variétés de formes que je choisirai parmi celles qui appartiennent aux trois cas que le dodécaèdre est susceptible d'offrir.

La variété analogique de la chaux carbonatée (fig. 144) fournit deux exemples du premier cas, dont l'un concerne l'incidence des faces r du dodécaèdre sur les faces g de l'équiaxe, et l'autre celle des mêmes faces sur les pans c, c, parallèles à l'axe. Son signe rapporté au noyau que représente la figure 145 est $\overset{a}{e}\overset{b}{\underset{c}{D}}\underset{r}{B}\overset{1}{\underset{g}{}}$.

Ici les arêtes les plus saillantes du dodécaèdre sont tournées vers les faces du rhomboïde, d'où il suit que t est plus grande que s. Nous aurons donc, d'après les expressions générales de t, s, m et b, et la formule (A),

$$t=5,\ s=4,\ m=2,\ b=1,\ g=\sqrt{3},$$

et (A)

$$sr : rz :: \sqrt{36\times 5+[(8-2)\sqrt{3}]^2} : (4+4)\sqrt{3} :: \sqrt{3} : \sqrt{2},$$

ce qui doit être, parce que l'incidence proposée est égale à la moitié de l'angle obtus du rhombe primitif 90^d, c'est-à-dire qu'elle est de $129^d\,13'\,54''$.

L'autre exemple offre deux incidences différentes, dont l'une est celle de la face r'', et l'autre celle de la face r sur le même trapézoïde c'.

Nous aurons pour la première

$$t=5,\ s=4,\ g=\sqrt{3};$$

ce qui donne

$$(D)'\ gr : rz :: \sqrt{48} : 4\sqrt{3},$$

d'où l'on conclut $gr=rz$; c'est-à-dire que l'incidence dont il s'agit est exactement de 135^d, ainsi que je l'ai annoncé en traitant de la variété dont il s'agit ici.

Pour la seconde,

$$t=4,\ s=5,\ g=\sqrt{3};$$

donc

$$gr : rz :: \sqrt{7} : 5,$$

d'où l'on conclut que l'incidence proposée est de $152^d\ 6'\ 52''$.

197. Les deux exemples suivans seront [illegible] du dodécaèdre auquel appartiennent les fac[illegible] la variété paradoxale de la même subst[illegible] biné avec des faces les unes f, f', obliq[illegible] tres c, c' parallèles à l'axe (fig. 146), o[illegible] faces g et f [illegible]47) toutes obliques à [illegible] dodécaèdre [illegible]duit par un décroiss[illegible] termédiaire[illegible] [illegible]mme je l'ai dit, l[illegible] ceux qui so[illegible] [illegible]ns le premier ca[illegible]

stituant le noyau hypothétique au véritable. La dernière variété, que j'appelle *articulée*, a pour signe $\overset{\cdot}{D}E''EB$. Celui de l'autre, qui porte le nom d'*itérative*, est $\overset{\cdot}{e}E''E$. Le noyau hypothétique étant le rhomboïde inverse dans lequel $g = \sqrt{3}$, $a = 6$, et l'exposant du décroissement étant 3, l'axe du dodécaèdre sera égal à 12, et les valeurs de s et de t seront 7 et 5.

Nous avons à déterminer, dans la variété articulée (fig. 147), les incidences de f et de g sur x. Le rapport de m à b, qui est celui de 2 à 1, étant ajouté aux valeurs qui viennent d'être indiquées, la formule devient, relativement à la face g,

$$(A)\ sr : rz :: \sqrt{159} : 11,$$

d'où il suit que l'incidence est de $131^d\,4'\,11''$. Pour avoir celle de f sur x, nous nous servirons des mêmes expressions, excepté le rapport de m à b, qui est ici celui de 2 à 1. Nous aurons ainsi $sr : rz :: \sqrt{6} : 8$, ce qui donnera $162^d\,58'\,2''$ pour l'incidence cherchée.

En conservant à s et t les mêmes valeurs, nous aurons pour l'incidence de x'' sur c, dans la variété itérative (fig. 146), $(D)\ gr : rz :: 1 : 7$, et l'incidence sera égale à $159^d\,18'$. Faisant $s = 5$, et $t = 7$, pour de x sur c, nous aurons $gr : rz :: \sqrt{31} : 5$, ce ne $131^d\,34'\,8''$.

Les deux variétés que nous considérons ici offrent la réunion des faces r, g, c, de la variété analogique, et la manière dont ces faces se combinent avec les faces x, e, donne naissance à des rapports mutuels qui me paraissent mériter d'être remarqués. Dans l'analogique, les trapézoïdes qui remplacent les sommets du dodécaèdre ac[illegible]és de deux triangles réunis par leurs bases, c[illegible] tel que *onl* (fig. 144), qui est semblable à la [illegible] face du rhomboïde équiaxe, entre dans l'or[illegible]ructure, et l'autre, tel que *ohl*, qui est s[illegible] la moitié d'une face du rhomboïde inverse, ne s[illegible]ncontre là que par l'effet des intersections des faces g avec les faces r. Dans la variété articulée (fig. 147) les mêmes triangles qui sont aussi accolés l'un à l'autre, ont leurs positions respectives déterminées par les lois de la structure, en sorte qu'ils forment entre eux un angle de $143^d 7' 49''$.

Les triangles obtus qui font partie des faces c de la variété itérative (fig. 146) sont semblables à ceux qui leur correspondent sur la variété analogique, en sorte que leur base est à leur apothème dans le même rapport de $\sqrt{4}$ à $\sqrt{3}$; mais l'apothème du triangle aigu, dans la variété articulée, est à celui du triangle obtus comme 3 est à 1, au lieu que dans l'analogique il n'en est que le double. C'est une suite de ce que les apothèmes sont entre eux dans chaque dodécaèdre comme l'exposant n du décroissement est à l'unité.

198. Je choisirai, pour dernier exemple, un des cas où les faces du dodécaèdre sont des triangles isocèles, comme les faces ξ, ξ de la variété *synallactique* (fig. 148), qui se combinent avec celles de la variété analogique (fig. 144). Le dodécaèdre a pour signe $\left(\frac{7}{5}ED^5B^1\right)$. Son noyau hypothétique serait le prisme hexaèdre régulier, qui dépendrait des décroissemens $\dot{D}A$, et aurait une hauteur égale à l'axe du véritable noyau; et le signe du dodécaèdre rapporté à ce prisme serait $\dot{\frac{1}{2}}B$, B représentant le côté de l'hexagone.

On trouve, à l'aide du calcul, que le rayon de la base commune des deux pyramides, dont le dodécaèdre est l'assemblage, est à l'axe de chacune d'elles dans le rapport de 1 à 3; et parce que ce rayon est égal à la ligne *dr* (fig. 1) dont l'expression est 2, on a ici $s=6$. Pour avoir maintenant l'incidence de ξ sur *g*, on mettra dans la formule (A) *s* à la place de $2t-s$, puis substituant à *s* sa valeur 6, à *g* la quantité $\sqrt{3}$, et au rapport *m* à *b* celui de 2 à 1, qui a lieu dans l'analogique, on trouvera

$$st : rz :: \sqrt{8} : \sqrt{5},$$

ce qui donne pour l'incidence cherchée, $128^d\ 19'\ 44''$.

Celle de ξ sur *c* sera tirée de la formule (D) avec les mêmes substitutions, ce qui donnera $gr:rz :: 2:3$, d'où l'on conclura que l'incidence est de $146^d\ 18'\ 37''$.

199. Je passe aux dodécaèdres compris dans le

second cas, qui naissent d'un décroissement sur les bords supérieurs du générateur. Mais, avant de citer des exemples, je vais déterminer d'une manière générale le noyau hypothétique, qui est aussi susceptible de produire le dodécaèdre à l'aide d'un décroissement sur ses bords inférieurs. J'en userai de même pour les dodécaèdres qui se rapportent au troisième cas. La considération de ces noyaux, outre l'extension qu'elle donne à la théorie, a l'avantage de faire apercevoir les propriétés dont jouissent une partie des variétés auxquelles elle s'applique.

Je supposerai d'abord que us soit plus grande que au, comme on le voit (fig. 149). Soit a l'axe as du générateur, g sa demi-diagonale horizontale, n l'exposant du décroissement qui produit le dodécaèdre, en agissant sur les bords supérieurs du générateur. Les valeurs numériques de ces trois quantités sont censées être toujours connues. Soit, de plus, a' l'axe du noyau hypothétique, g' et p' les demi-diagonales de ses faces, n' l'exposant de la loi qui donne naissance au dodécaèdre en agissant sur ses bords inférieurs, et n'' l'exposant de la loi susceptible de produire le noyau hypothétique, en agissant sur l'angle supérieur du générateur.

Déterminons successivement ces cinq quantités.

1°. Pour a'. Nous avons eu plus haut $au = \frac{3n-1}{3n} . a$,

et $$us = \frac{(n+1)}{3n} a.$$

Maintenant

$$a' = 3us - 3au = \frac{2-n}{n}\,a.$$

2°. Pour g'. Nous avons eu $mu = \frac{n+1}{n}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}g^2}$.

Or, la même quantité est égale à $\sqrt{\frac{4}{3}g'^2}$. Donc

$$g' = \frac{n+1}{n}\,g.$$

3°. Pour p'. $p' = \sqrt{\frac{1}{3}g'^2 + \frac{1}{9}a'^2}$.

4°. Pour n'. La partie de l'axe du générateur qui excède de chaque côté l'axe du noyau hypothétique, et qui a pour expression $\frac{a'}{n'-1}$, est $\frac{a-a'}{2}$.

Or $\quad a - a' = a - \frac{(2-n)}{n}\,a = 2a\,\frac{(n-1)}{n}$;

donc

$$a\,\frac{(n-1)}{n} = \frac{a-a'}{2} = \frac{a'}{n'-1},$$

d'où l'on tire

$$n' = \frac{an + a'n - a}{an - a}.$$

5°. Pour n''.

$$mu : au :: \frac{n''+1}{n''}\sqrt{\frac{4}{3}g^2} : \frac{2n''-1}{3n''}.a :: \sqrt{\frac{1}{3}g'^2} : \frac{1}{3}a';$$

$$2(n''+1)g : (2n''-1)a :: g' : a',$$

d'où l'on conclut

$$2(n''+1)a'g = (2n''-1)ag',$$

et

$$2n''a'g + 2a'g = 2n''ag' - ag'.$$

On tire de cette équation

$$n^{N} = \frac{2a'g + ag'}{2ag' - 2a'g}.$$

200. Supposons maintenant au plus grande que us, ainsi qu'on le voit figure 5, pl. 15.

Nous aurons, 1°.

$$a' = 3au - 3 \qquad \frac{-6}{3n}a = \frac{n-2}{n}.a.$$

2°. g' aura en[pression] $\frac{n+1}{n}g$.

3°. Celle de p' [se] $\sqrt{\frac{1}{3}g'^{2} + \frac{1}{3}a'^{2}}$.

4°. Pour n'.

$\frac{a'}{n'-1} = \frac{a-a'}{2}$. Or, $a - a' = a - \frac{(n-2)}{n}.a = \frac{2a}{n}$;

donc

$\frac{a'}{n'-1} = \frac{a}{n}$ et $a'n = an' - a$, d'où $n' = \frac{a'n+a}{a}$.

5°. Pour n''. Son expression sera toujours $\frac{2a'g+ag'}{2ag'-2a'g}$.

201. C'est encore la cristallisation de la chaux carbonatée qui m'a offert les deux variétés que je vais citer comme exemples de dodécaèdres compris dans le cas que nous considérons ici. Les faces qui se combinent dans l'une et l'autre avec celles de ces dodécaèdres sont situées parallèlement à l'axe du générateur.

La première, qui est représentée (fig. 150), et

qui porte le nom de *bisadditive*, a pour signe $B^{\frac{3}{5}}_{\frac{3}{7}}{}^{c}_{e}$. Le dodécaèdre qui en fait partie tourne ses arêtes les plus saillantes, telles que *d*, vers les faces du générateur.

Supposant $a=9$, d'où il suit que $g=\sqrt{27}$, et $p=\sqrt{18}$, et déterminant les autres quantités d'après les valeurs algébriques trouvées plus haut, nous aurons, pour l'axe du noyau hypothétique, $a'=3$; pour ses demi-diagonales, $g'=\sqrt{75}$, $p'=\sqrt{26}$; pour l'exposant de la loi qui produit le dodécaèdre en agissant sur les bords inférieurs du noyau hypothétique, $n'=2$; et pour l'exposant de la loi qui donne naissance au noyau hypothétique en agissant sur les angles supérieurs du générateur, $n''=\frac{7}{4}$; ce qui donne pour le signe représentatif, $A^{\frac{7}{4}}$.

On voit que la loi qui produit le dodécaèdre est la même que celle qui a lieu pour la variété métastatique, en agissant par deux rangées sur les bords correspondans du générateur. Mais de plus, si l'on cherche le rapport entre le sinus et le cosinus de la demi-incidence de 7 sur 7′, on trouve qu'il est celui de $\sqrt{29}$ à $\sqrt{3}$, lequel a lieu aussi dans le dodécaèdre métastatique (p. 336), avec cette différence, que l'incidence qui en résulte dans le premier dodécaèdre appartient aux faces les moins inclinées entre elles, tandis que dans le second ce sont les faces les plus

inclinées qui la donnent. J'ai cru qu'il ne serait pas indifférent de faire remarquer cette analogie entre les lois de structure relatives à deux rhomboïdes qui contrastent si fortement par le rapport de leurs dimensions, l'axe du générateur étant à la demi-diagonale oblique comme 3 à $\sqrt{3}$, et celui du noyau hypothétique étant à [illegible] ligne comme 3 à $\sqrt{75}$, ou comme 3 à $5\sqrt{3}$.

Les sinus et les co[illegible]s angles égaux aux moitiés des incidences[illegible]ent dans les deux dodécaèdres, offrent aus[illegible]orrélation qui me paraît mériter d'être citée. [illegible]s le métastatique, leur rapport est celui de $\sqrt{5}$ à $\sqrt{3}$, et dans la variété bisadditive, celui de $\sqrt{175}$ à $\sqrt{3}$, ou celui de $5\sqrt{5}$ à $\sqrt{3}$, d'où l'on voit que le cosinus étant le même de part et d'autre, les sinus sont entre eux comme les demi-diagonales du générateur et du noyau hypothétique.

Le calcul donne pour l'incidence de 7 sur $7'$, qui est commune aux deux dodécaèdres, $144^d\,20'\,26''$, et pour celle de 7 sur 7, qui est particulière à celui-ci, $162^d\,22'\,40''$.

Il me reste à indiquer les deux incidences des faces 7, 7, sur les pans du prisme. L'arête d, qui est la plus saillante, étant tournée vers l'un des rhombes du générateur, on fera, dans l'application de la formule à l'incidence de $7'$ ou de 7 sur c'', $s=4$, $t=5$, et l'on aura (D) $gr : sz :: \sqrt{7} : 1$, ce qui donne $110^d\,43'\,43''$, pour l'incidence dont il s'agit. L'arête n

étant au contraire la moins saillante, les valeurs de s et de t seront 5 et 4, et l'on trouvera

$$gr : sz :: \sqrt{103} : 5,$$

ce qui donne pour l'incidence de $7'$ sur c, $116^d 14' 19''$.

202. La variété que je nomme *surbaissée*, et dont on voit la projection (fig. 151), se présente naturellement à la suite de la précédente, comme exemple d'un dodécaèdre qui tourne ses arêtes les moins saillantes, telles que λ, vers les faces du générateur, ainsi que l'indique la figure 5, pl. 15, dans laquelle us est plus petite que au. C'est ce qui la distingue de l'autre, avec laquelle elle a beaucoup d'analogie par son aspect, en sorte qu'à en juger d'après le coup-d'œil, on peut être tenté de les confondre. Le signe de celle dont il s'agit ici est $\overset{s}{B}\overset{a}{e}\overset{}{.}$ $\overset{}{t}\ \overset{}{c}$. En supposant que l'on ait comme ci-dessus, $a=9$, $g=\sqrt{27}$, $p=\sqrt{18}$, et en suivant, par rapport aux valeurs numériques des autres lignes, la marche qui a été tracée à l'égard de la bisadditive, on trouvera

$$a'=3,\ g'=\sqrt{48},\ p'=\sqrt{17},\ n'=2,\ n''=1,$$

ce qui indique deux rangées de soustraites sur l'angle supérieur du générateur. On voit que la loi qui produit le dodécaèdre, en agissant sur les bords inférieurs du noyau hypothétique, a lieu par deux rangées comme dans la variété métastatique, et aussi comme dans la bisadditive. A l'égard des incidences

mutuelles des faces du dodécaèdre, on a pour l
rapport entre le sinus et le cosinus de la moitié d
celle de t sur t' celui de $\sqrt{89}$ à $\sqrt{3}$, ce qui donn
pour cette incidence $159^d\,11'\,34''$, et pour le rapport
entre le sinus et le cosinus de la demi-incidence de t
sur t', $\sqrt{20} : \sqrt{3}$, d'où l'on déduit pour cette inci-
dence $137^d\,39'\,26''$.

Dans les applications de la formule relative au
incidences sur les faces c, on fera $s=5$, $t=4$, s
s'agit de celle de t ou de t' sur c', et l'on aura

$$(D)\quad gr : rz :: \sqrt{67} : 5,$$

ce qui donne pour cette incidence $121^d\,25'\,3''$; et s
s'agit de celle de t' ou de t'' sur c, on fera $s=4$, $t=5$;
on trouvera $gr : rz :: \sqrt{19} : 2$, ce qui donne pou
cette seconde incidence $114^d\,38'\,50''$.

203. Il me reste à traiter des dodécaèdres qui ap
partiennent au troisième cas, et qui sont produits
par des décroissemens sur les angles latéraux du gé-
nérateur. Je suivrai ici la même marche que dans
l'article précédent, où j'ai commencé par déterminer
d'une manière générale le noyau hypothétique.

Le dodécaèdre est susceptible, comme ceux qui
sont compris daus le second c[illegible] deux positions
différentes, selon que ses a[illegible]lus saillantes
sont tournées vers les face[illegible]teur, ou
c'est le contraire qui a lieu. [illegible] re
la première de ces position[illegible]of.

sont les plus saillantes, répondent aux diagonales obliques *ad*, *gs*, de la coupe principale du générateur. Le quadrilatère $oa'ps'$, qui est celle du noyau hypothétique, tourne vers les mêmes diagonales les bords supérieurs $a'o$, ps' du rhomboïde auquel il appartient, et les diagonales obliques $a'p$, os' correspondent aux bords supérieurs *ag*, *ds*, du générateur.

A mesure que le décroissement qui donne le dodécaèdre devient plus rapide, les arêtes *to*, *pi*, se rapprochent des diagonales *ad*, *gs*, et leur différence de longueur avec les arêtes *oi*, *tp*, va en diminuant, en sorte qu'il y a un terme où elles deviennent égales, et à ce terme le dodécaèdre se trouve converti en double pyramide droite. Au-delà de ce terme, les effets inverses des précédens prennent leur place, ainsi qu'on le voit fig. 153. Les arêtes les plus saillantes *oi*, *tp*, du dodécaèdre, qui sont en même temps les plus courtes, sont tournées vers les bords supérieurs *ds*, *ag*, du générateur, et le contraire a lieu par rapport aux arêtes *ot*, *pi*. D'une autre part, les diagonales obliques $a'o$, $s'p$, du noyau hypothétique, et celles du générateur sont en regard, et c'est la même chose à l'égard des bords supérieurs.

J'ai déjà remarqué plus haut que les lignes *oz*, *px*, qui sont les perpendiculaires sur l'axe, dans le noyau hypothétique, ne coïncident pas avec les directions des lignes *gn*, *dr*, qui font la même fonction dans le générateur : elles sont tantôt plus éloignées (fig. 152)

et tantôt plus voisines du centre (fig. 153). La différence va en diminuant, à mesure que le dodécaèdre approche du terme où il devient un solide pyramidal, et où l'axe du noyau hypothétique s'évanouit. Je reviendrai plus bas sur le défaut de coïncidence dont il s'agit, et je déterminerai le point de l'axe *ti*, qui donne la limite au-delà et en deçà de laquelle les perpendiculaires sur l'axe subissent un changement dans leurs positions respectives.

204. Je reprends maintenant la figure 152, et je vais déterminer diverses quantités relatives à l'hypothèse qu'elle représente.

Soit A l'axe du générateur, G et P les demi-diagonales de ses rhombes, $\frac{a}{g}$ le rapport de A à G, n l'exposant de la loi qui produit le dodécaèdre en agissant sur les angles latéraux, a' l'axe du noyau hypothétique, g' et p' les diagonales de ses faces, n' l'exposant de la loi qui en agissant sur ses bords inférieurs donne naissance au dodécaèdre, et n'' l'exposant de la loi susceptible de produire le noyau hypothétique comme forme secondaire du générateur.

J'ai donné plus haut les expressions des trois lignes ax, tx, ix, nécessaires pour l'[illegible]lication de la formule, en adoptant comme qu[illegible]nues l'exposant n et le rapport $\frac{a}{g}$. J'ai et[illegible]xpre[illegible]

dont il s'agit $tz = 4n$, $iz = 2n+$[illegible] $= \frac{6n}{}$

Je l[illegible]erverai, pour la facil[illegible]

j'en déduirai celles des diverses quantités dont j'ai parlé.

1°. Pour A ou *as*.

$$as = ti - 2at = ti - 2 \cdot \frac{as}{2n} = ti - \frac{as}{n}; \; ti = tz + iz = 6n + 3;$$

donc

$$ti - 2at = 6n + 3 - \frac{as}{n};$$

donc

$$as = 6n + 3 - \frac{as}{n},$$

ou

$$as \cdot n = 6n^2 + 3n - as,$$

et

$$as \cdot n + as = 6n^2 + 3n;$$

donc

$$\text{A ou } as = \frac{6n^2 + 3n}{n+1}.$$

2°. Pour G.

$$A : G :: a : g; \; \frac{6n^2+3n}{n+1} : G :: a : g; \; G = \frac{g}{a} \cdot \frac{6n^2+3n}{n+1}.$$

3°. Pour P. Connaissant A et G, on aura facilement P, dont l'expression est $\sqrt{\frac{1}{3}G^2 + \frac{1}{3}A^2}$.

4°. Pour a'.

$$a' = 3iz - 3tz = 6n + 9 - 12n = 9 - 6n.$$

5°. Pour g'.

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}g'^2} = oz = \frac{6n}{a}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2};$$

donc

$$g' = \frac{6ng}{a}.$$

6°. Pour p'. On aura son expression, en procédant de la même manière que pour celle de P.

7°. Pour n'. $a't$ ou $\frac{1}{3}(ti-a')$ étant la partie de l'axe du dodécaèdre qui excède de chaque côté l'axe du noyau hypothétique, et le décroissement ayant lieu sur les bords inférieurs de ce noyau, on aura

$$\tfrac{1}{3}(ti-a')=\frac{a'}{n'-1},$$

ou

$$\tfrac{1}{3}(6n+3-9+6n)=\frac{9-6n}{n'-1},\text{ et }2n-1=\frac{3-2n}{n'-1},$$

d'où l'on déduit $n'=\frac{2}{2n-1}$.

8°. Pour n''. Si l'on suppose que la diagonale oblique $a'p$ du noyau hypothétique se meuve parallèlement à elle-même, jusqu'à ce qu'elle se trouve en contact avec le point g, il est aisé de voir qu'elle sera située à l'égard du générateur, comme une face d'un rhomboïde produit en vertu d'un décroissement par renversement sur l'angle situé à l'extrémité inférieure de la diagonale sg du générateur. La figure 154 représente les coupes des deux rhomboïdes dans leurs positions respectives; et d'après la formule qui a été employée pour les exemples du même genre, on a

$$gn:a'n::\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2}:\frac{2n''+2}{6n''-3}.a::g\sqrt{\tfrac{1}{3}}:\frac{n''+1}{6n''-3}.a::g'\sqrt{\tfrac{1}{3}}:\tfrac{1}{3}a',$$

ou

$$(2n''-1)g \qquad \text{)}a :: g' : a',$$

d'où l'on conclut

$$2n''a'g-a'g=n''ag' \qquad n''=$$

205. J'ai promis de déterminer la limite entre les deux positions de la ligne *oz* (fig. 152), l'une au-dessus, l'autre en dessous de la ligne *ln*. Pour y parvenir, il faut égaler les valeurs de *tz* et de *tn*, et en déduire la valeur de *n*. Or,

$$tn = at + an = \frac{a}{2n} + \frac{a}{3} = \frac{3a + 2an}{6n};$$

et substituant la valeur de $a = \frac{6n^3 + 3n}{n+1}$,

$$tn = \frac{18n^3 + 9n^2 + 12n^2 + 6n^3}{(n+1)6n} = \frac{4n^2 + 8n + 3}{2n+2};$$

mais $$tz = 4n;$$

donc on aura

$$\frac{4n^2 + 8n + 3}{2n+2} = 4n, \text{ ou } 4n^2 = 3,$$

d'où l'on tire $n = \sqrt{\frac{3}{4}}$, quantité incommensurable, d'où il suit que la coïncidence des deux lignes sur une même direction ne répond à aucune loi possible de décroissement, en sorte qu'il y a un saut brusque d'une position à l'autre. Lorsque $n = \frac{3}{4}$, comme dans le dodécaèdre que nous considérons ici, on a $tn = \frac{45}{14}$, et $tz = \frac{45}{15}$. *tz* étant alors plus petite que *tn*, la ligne *oz* se trouve au-dessus de *ln*, comme le représente la figure. Si l'on fait $n = 1$, on aura $tz = \frac{45}{14}$, c'est-à-dire qu'elle sera plus grande que *tn*, qui conserve toujours sa valeur $\frac{45}{14}$, et la ligne *oz* sera située en dessous de *ln*. A mesure que la valeur de *n* variera

entre $\frac{3}{4}$ et l'unité, *oz* approchera de coïncider avec *ln*, soit dans un sens, soit dans l'autre, sans jamais arriver à une coïncidence exacte.

La ligne *oz* continuant de descendre en dessous de la ligne *ln*, après l'avoir dépassée, restera toujours en dessus de *dr*. Seulement, elle s'en rapprochera, à mesure que la loi de décroissement devenant plus rapide, la distance entre *ot* et *da* diminuera. Or, quelque petite qu'elle soit, les points *o* et *d* qui sont les extrémités des lignes *oz* et *dr*, seront toujours séparés, et lorsqu'ils coïncideront, la ligne *ot* se confondant elle-même avec la diagonale *ad*, le dodécaèdre s'évanouira.

La ligne *oz*, en se rapprochant de *dr*, arrive à un terme où les lignes *tz*, *iz* deviennent égales; c'est ce qu'exprime l'équation $4n = 2n + 3$, d'où l'on tire $n = \frac{3}{2}$. Le dodécaèdre se trouve alors converti en une double pyramide droite hexaèdre. Au-delà de ce terme, *tz* devient plus grande que *iz*, ainsi qu'on le voit fig. 153. Voici les expressions algébriques des diverses lignes indiquées plus haut, qui conviennent au cas dont il s'agit.

1°. Pour A ou *as*. On aur

$$as = \frac{6n^2+3n}{5}$$

2°. Pour G. On aura de n

$$\frac{6n'}{n}$$

3°. Pour P. $P = \sqrt{\frac{1}{3}G^2 +$

4°. Pour *a'*.

$$- 3iz = 12n - ($$

5°. Pour g'. $g' = \frac{6ng}{a}$, comme ci-dessus.

6°. Pour p'. On déterminera son expression, en procédant comme pour celle de P.

7°. Pour n'. $\frac{1}{a}(ti - a') = \frac{a'}{n' - 1}$. Substituant à la place de ti et de a' leurs valeurs $6n+3$ et $6n-9$, on trouvera $n' = \frac{2n-1}{2}$.

8°. Pour n''. Si l'on conçoit que la diagonale $a'o$ du noyau hypothétique se meuve parallèlement à elle-même vers le point t, jusqu'à ce qu'elle se trouve en contact avec le point a, il est facile de voir qu'elle sera située à l'égard du générateur comme une face d'un rhomboïde produit par un décroissement sur l'angle supérieur de ce générateur. On déterminera la valeur qui en résulte pour n'', en appliquant ici le calcul qui a été employé pour les dodécaèdres compris dans le second cas, et qui se rapporte à la fig. 5, pl. 15. La proportion de laquelle on déduit cette valeur est

$$\frac{(n''+1)}{n''}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} : \frac{2n''-1}{3n''}.a :: \sqrt{\tfrac{1}{3}g'^2} : \tfrac{1}{3}a',$$

ce qui donne

$$n'' = \frac{2a'g + ag'}{2ag' - 2a'g}.$$

206. La variété que j'ai choisie comme premier exemple relatif au troisième cas, et qui appartient à la chaux carbonatée, semble enchérir par

ses propriétés sur toutes celles qui ont été citées jusqu'ici. Son noyau hypothétique n'est pas simplement, comme dans ces dernières, un rhomboïde secondaire d'une forme particulière, duquel naît un dodécaèdre qui n'est lui-même qu'hypothétique, c'est une reproduction du générateur, et le résultat de la loi qui en fait dépendre le dodécaèdre se trouve realisé par la cristallisation dans une autre variété que j'indiquerai plus bas.

Celle dont il s'agit ici, et que représente la fig. 155, porte le nom d'*anarmostique*. Son signe est..... $\dot{D}E^{\frac{2}{3}}\dot{E}_{\frac{2}{3}}E^{\frac{2}{3}}\dot{E}A$. Les faces r, r, appartiennent au do-
$a \quad f \quad k \quad , \quad o$
décaèdre que nous avons ici à considérer, et qui est représenté séparément (fig. 156). On voit (fig. 157) la projection de son noyau hypothétique. En comparant les figures 152 et 157, on remarquera du premier coup-d'œil que ce noyau rentre parmi ceux dont la coupe principale tourne ses bords supérieurs $a'o'$, ps', vers les diagonales obliques ad, gs, du générateur. Dans le même cas, les arêtes les plus saillantes c, c' (fig. 156) du dodécaèdre répondent aussi à ces diagonales, et de plus leur sont parallèles.

L'exposant de la loi qui donne le dodécaèdre étant représenté par $\frac{2}{3}$, dans les applications de la théorie, cherchons les valeurs numériques dont nous avons donné plus haut les expressions algébriques. Nous

aurons,

1°. A ou $as = \frac{6n^2+3n}{n+1} = \frac{45}{14}$.

2°. $G = \frac{g}{a} \times \frac{6n^2+3n}{n+1} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{45}{14}$.

3°. $a' = 9-6n = \frac{9}{8}$; $g' = \frac{9}{8}\sqrt{\frac{1}{3}}$.

De là il suit que

$$a' : g' :: \sqrt{3} : 1 :: A : G.$$

C'est-à-dire que le noyau hypothétique est semblable au générateur, ainsi que je l'ai annoncé.

4°. $n' = \frac{7}{2n-1} = 4$.

5°. $n'' = \frac{a'g+ag'}{2a'g-ag'} = 2$. C'est-à-dire que le rhomboïde hypothétique est susceptible d'être produit à l'aide d'un décroissement par deux rangées en hauteur sur les angles inférieurs du générateur, lequel décroissement donne un rhomboïde secondaire semblable au primitif, et c'est ce qui doit avoir lieu dans le cas présent.

207. Mais ce n'est pas tout : la loi du décroissement par quatre rangées qui, en agissant sur les bords inférieurs du noyau hypothétique, est susceptible de faire naître le dodécaèdre, existe dans la variété de chaux carbonatée que j'ai nommée *ascendante*, et que représente la figure 158. C'est d'elle que dérivent les faces n, n, qui se combinent avec les faces m du rhomboïde contrastant et les pans c, c du prisme hexaèdre, ce qui donne pour le signe représentatif

de cette variété, $\overset{s}{c}\,\overset{1}{m}\,\overset{4}{n}\,D$. Ce second cas donne une existence réelle à ce dont le premier n'indique que la possibilité.

Il me reste à déterminer les incidences de faces f, o et h, sur celles du dodécaèdre.

1°. Pour f. Je reprends la figure 152, et je cherche les valeurs numériques des coordonnées tz, iz et oz, à l'aide de leurs expressions algébriques trouvées ci-dessus (p. 592). Nous aurons $tz = 4n = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$,

$$iz = 2n + 3 = 2 \cdot \frac{3}{4} + 3 = \frac{9}{2}, \quad oz = \frac{6n}{a}\sqrt{\tfrac{4}{3}g^2} = 3.$$

Maintenant, je considère que le rhomboïde hypothétique qui fait ici la fonction de générateur, et dont la coupe principale est $a'os'p$, tourne ses diagonales obliques vers les arêtes les moins saillantes du dodécaèdre. Ainsi le rapport de s à t sera celui de tx à ix. Or, $tx = iz = \frac{9}{2}$; $ix = tz = 3$. Donc $s = \frac{9}{2}$ et $t = 3$. De plus, $px = oz = 3 = \sqrt{\frac{4}{3}g'^2}$. Donc $g' = \frac{3}{2}\sqrt{3}$. Multipliant toutes ces quantités par $\frac{2}{3}$, nous aurons

$$s = 3, \quad t = 2, \quad g' = \sqrt{3}.$$

Or, les faces du rhomboïde f se rapportent au cas de la formule (C) p. 577. Donc

$$gr : rz :: \sqrt{\tfrac{5}{3} + (\tfrac{1}{4} - 3)^2} \cdot \ldots \sqrt{\tfrac{5+3}{-}} : 8$$

$$:: \sqrt{\tfrac{8}{3}} : 8 :: 1 : \sqrt{\ }$$

ce qui donne pour l'inclid

2°. Pour *o*. La formule (B) donne

$$sr : r\varepsilon :: \sqrt{1+27} : \sqrt{12} :: \sqrt{7} : \sqrt{3};$$

d'où l'on déduit pour l'incidence de *o* sur *v* 132d13′22″.

3°. Pour *h*. On pourrait conclure l'incidence de cette face sur les faces *v*, *v*, de celle qui a lieu entre ces dernières, en ajoutant 90d à celui qui en donne la mesure. Mais, pour ne pas laisser la formule (*a*) sans application, je la substituerai ici à celle que j'ai indiquée en traitant des décroissemens sur les angles latéraux d'un rhomboïde. Nous aurons donc

$$sr : r\varepsilon :: \sqrt{\tfrac{1}{3}(4+9)} : 4+9 :: 1 : \sqrt{39},$$

ce qui donne pour l'incidence proposée 170d54′9″.

La variété ascendente qui sert ici de terme de comparaison à l'anarmostique, va nous fournir une nouvelle application de la formule, dont le sujet sera l'incidence des faces *m* (fig. 158) du rhomboïde contrastant sur les faces *n*, *n*, du dodécaèdre combiné avec ce rhomboïde. D'après ce qui a été dit de la similitude entre le même dodécaèdre et celui auquel appartiennent les faces *v*, *v* (fig. 155), nous aurons toujours $s=3$, $t=2$, $g=\sqrt{3}$, et de plus $m=1$, $b=4$. Ces valeurs substituées dans la formule (A) donnent

$$sr : rz :: \sqrt{\tfrac{17}{3}+25} : 2+12 :: \sqrt{82} : \sqrt{588},$$

d'où l'on déduit pour l'incidence de *m* sur *n* (fig. 158) 159d21′21″.

208. J'ai maintenant à proposer un second exemple tiré d'un dodécaèdre qui tourne ses arêtes les moins saillantes vers les faces du générateur. Je choisirai la variété de fer oligiste que je nomme *uni-sénaire*, et que représente la fig. 31. Son signe est $PAE^{66}E$.

P^{o}_{g}

L'exposant de la loi qui donne le dodécaèdre étant 3, et les valeurs numériques du rapport entre les dimensions du générateur qui sont censées connues étant $a=\sqrt{63}$, $g=\sqrt{9}$, $p=\sqrt{10}$, si l'on cherche celles des autres quantités, d'après les expressions algébriques données plus haut, on aura

1°. A ou $as=\frac{6n^2+3n}{n+1}=\frac{63}{4}$.

2°. $G=\frac{g}{a}\cdot\frac{6n^2+3n}{n+1}=\sqrt{\frac{1}{7}}\cdot\frac{63}{4}$.

3°. $P=\sqrt{\frac{1}{3}G^2+\frac{1}{9}A^2}=\frac{3}{4}\sqrt{70}$.

4°. $a'=6n-9=9$.

5°. $g'=\frac{18}{\sqrt{7}}$.

6°. $p'=$.

7°. $n'=\frac{2n-1}{2}=\frac{5}{2}$.

8°. $n''=2$. Cette loi es donn
boïde semblable à celui d e est

Pour déterminer l'inci faces
dodécaèdre sur la face o p
se servira de la formule si

cas de ce genre, et qui est $sr : rz :: \sqrt{(2t-s)^2+3s^2} : 2g$, $s=4n=12$, $t=2n+3=9$, $g'=\frac{18}{\sqrt{7}}$.

Donc nous pouvons faire $s=4$, $t=3$, $g'=\sqrt{\frac{36}{7}}$.

Ces valeurs substituées dans la formule donnent

$$sv : vz :: \sqrt{4+48} : \sqrt{\tfrac{36}{7}} \cdot 4 :: \sqrt{13} : \sqrt{\tfrac{36}{7}} :: \sqrt{91} : 6 ;$$

d'où l'on conclura pour l'incidence proposée..... 126d 16′.

209. J'ajouterai ici un exemple relatif au cas où le décroissement sur les angles latéraux ayant $\frac{3}{1}$ pour exposant, le dodécaèdre qui en résulte est composé de deux pyramides droites réunies par leurs bases. Le sujet de cet exemple sera la variété de fer oligiste dont on voit la projection (fig. 35) et que je nomme *bino-ternaire*. Elle a pour signe $P E^{\frac{n}{3}} E A$. L'incidence qu'il s'agit de déterminer, à l'aide de la formule modifiée convenablement est celle des faces n, n du dodécaèdre, sur les faces s, s du rhomboïde terminal. Dans ce cas on a

$$sr : rz :: \sqrt{s^2 \cdot \tfrac{1}{7}(m^2+6^2)+(ms-2ab\sqrt{\tfrac{1}{35}g^2})^2} : 2m\sqrt{\tfrac{1}{35}g^2}+65.$$

Nous avons eu

$$ti = 6n+3 = 12 ;$$

donc

$$=6,\ g'\frac{6n \cdot g}{a} = 9 \cdot \sqrt{\tfrac{9}{63}} = \frac{9}{\sqrt{7}} ;$$

donc

$$s : g' :: 6 : \frac{9}{\sqrt{7}} :: 2 : \frac{3}{\sqrt{7}} :: \sqrt{28} : \sqrt{9}.$$

Ainsi nous pouvons faire $s = \sqrt{28}$. $g = \sqrt{9}$. Dans le rhomboïde terminal $g'' : p'' :: 12 : \sqrt{55}$. Donc

$a'' : g'' :: \sqrt{63} : \sqrt{144}$; et $\sqrt{\frac{1}{3}g''a} : \frac{1}{3}a' :: \sqrt{48} : \sqrt{7} :: m : b$.

Substituant ces valeurs dans la formule, on aura

$$sr : rz :: \sqrt{28 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 55 + (\sqrt{48 \cdot 28} - 2\sqrt{7 \cdot 3})^2} : 2\sqrt{48 \cdot 3} + \sqrt{7 \cdot 28},$$

et en réduisant, $:: \sqrt{9523} : \sqrt{1083}$. Ce rapport donne pour l'incidence proposée 136d 51′.

210. Je vais terminer cet article par un résumé des applications que j'ai faites de la formule à la théorie de la chaux carbonatée, qui est de toutes les espèces minérales la plus féconde, sous tous les rapports, en modifications diversifiées. J'ai observé jusqu'ici, parmi ses formes cristallines, 17 rhomboïdes différens, auxquels il faut ajouter les deux limites, dont l'une donne des faces perpendiculaires à l'axe, et l'autre des faces qui lui sont parallèles, ce qui fait en tout 19. Le nombre des [illegible]èdres qui font partie de la même série est [illegible]ultiplia[illegible]s deux nombres l'un par l'au[illegible]175 co[illegible] sons binaires relatives aux [illegible]t il [illegible] autant d'incidences respect[illegible] dan[illegible]s combinaisons. Parm[illegible]

a environ 70 qui existent sur les formes que renferme ma collection. Plusieurs de ces mêmes incidences m'ont été offertes par de nouvelles variétés que j'ai reçues récemment, et l'on a tout lieu de présumer qu'à mesure qu'il s'en présentera d'inconnues, le nombre de celles qui seront susceptibles des applications de la formule s'accroîtra de plus en plus. J'ai pensé que ce détail achèverait de faire sentir l'utilité d'un moyen de détermination, à l'aide duquel la marche est tracée d'avance, pour arriver en un instant à une solution aussi expéditive que facile de tous les problèmes du même genre dont les découvertes à venir pourront fournir la matière

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE

DES PRINCIPAUX ARTICLES

CONTENUS DANS CE VOLUME.

INTRODUCTION..... Page v

PARTIE SYNTHÉTIQUE.

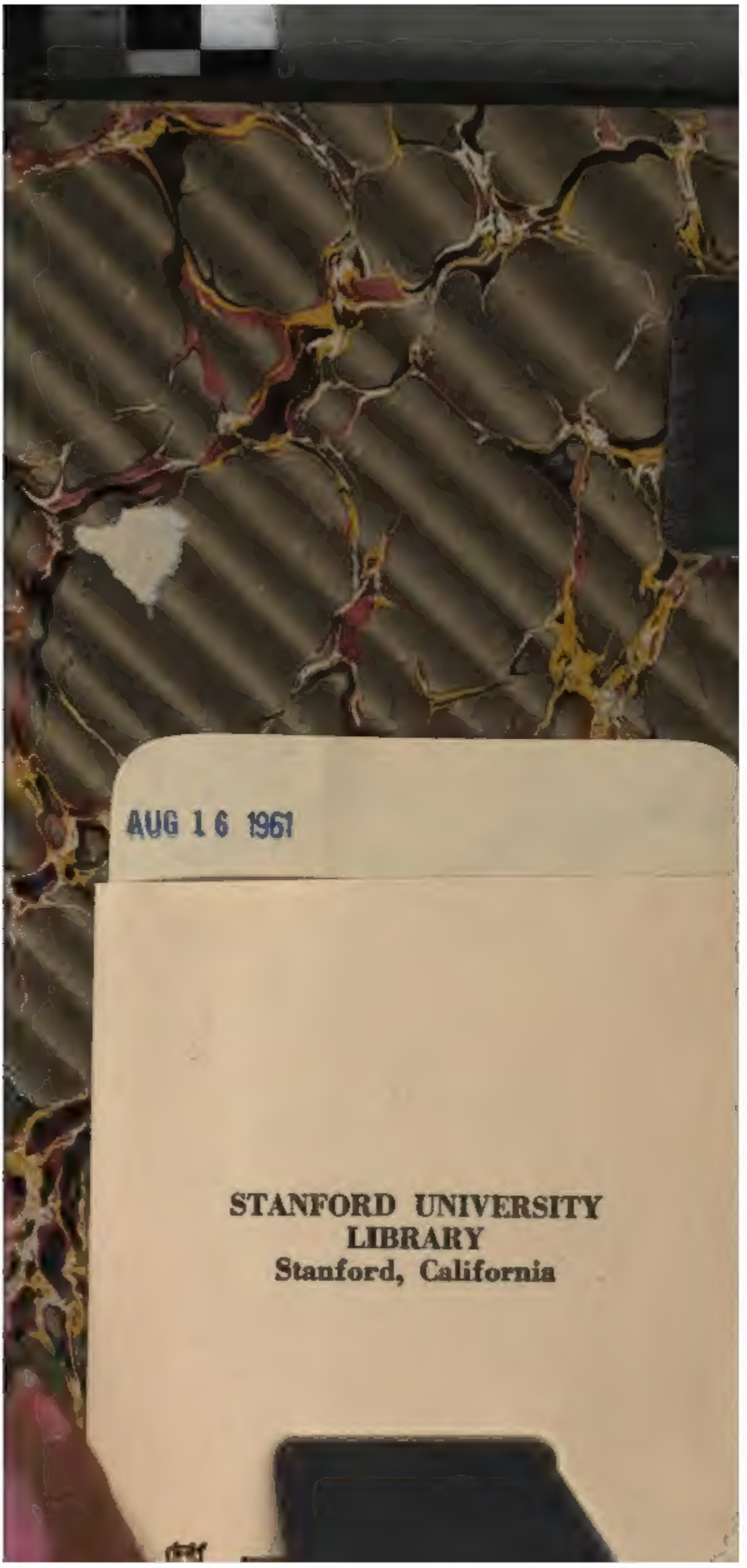
Idée générale des minéraux, et des caractères qui les distinguent des êtres organiques..... 1
Notion des formes cristallines..... 4
Division des formes cristallines considérées en général.. 6
Des variations des formes cristallines..... 25
Des principes généraux de la théorie..... 31
Des formes primitives..... ibid.
Des formes des molécules intégrantes..... 44
Des molécules soustractives..... 51
Des lois auxquelles est soumise la structure des cristaux.. 55
Des décroissemens sur les bords..... 59
Des décroissemens sur les ar... décroissemens intermédiaires..... 111
Des décroissemens auxiliaires..... 72
Des noyaux hypothétiques..... 79
De la loi de symetrie.....
De la manière dont l'accroisse.....

De la cause physique des lois de décroissement..... 235
Considérations sur le tissu des faces qui terminent les formes secondaires..... 241
Des joints surnuméraires..... 244
De la fécondité des lois de décroissement..... 252
Des signes représentatifs des cristaux..... 257.

PARTIE ANALYTIQUE.

Du Rhomboide 281
Des lois ordinaires de décroissement relatives au rhomboide..... 290
I. Décroissement sur les bords supérieurs..... *ibid.*
II. Décroissemens sur l'angle supérieur..... 310
III. Décroissemens sur les bords inférieurs..... 321
IV. Décroissemens sur les angles latéraux..... 348
V. Décroissemens sur l'angle inférieur..... 368
Des décroissemens intermédiaires relatifs au rhomboide. 438
I. Décroissemens intermédiaires sur les angles E, x étant dans le sens de D, et y dans le sens de B.. 440
II. Décroissemens intermédiaires sur les angles E, x étant dans le sens de B, et y dans le sens de D.. 480
III. Décroissemens intermédiaires sur les angles e... 489
IV Décroissemens intermédiaires sur l'angle A..... 510
De diverses formes secondaires dérivées du rhomboide... 547
Formule pour la détermination des angles des formes composées..... 566

FIN DE LA TABLE DES ARTICLES.



AUG 16 1961

STANFORD UNIVERSITY
LIBRARY
Stanford, California